

GENERAL LIBRARY  
SEP 1920  
UNIV. OF MICHIGAN

# ANNALEN DER PHYSIK.

HERGEÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. v. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 61. Heft 5

DER GANZEN REIHE 366. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Bd. 61 kostet M 45.—.

Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 3. März 1920.

# Inhalt.

	Seite
1. Helge Bohlin. Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver. (Hierzu Taf. I.)	421
2. P. Ehrenfest. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?	440
3. Richard Gans. Das Verhalten Hertzscher Gitter.	447
4. Richard Gans und Ricardo Calatroni. Die Form ultramikroskopischer Platintheilchen	465
5. Reinhard Mecke. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel.	471

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 61.

### 1. Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver<sup>1)</sup>; von Helge Bohlin.

(Hierzu Tafel I.)

Während die von v. Laue<sup>2)</sup> und W. H. und W. L. Bragg<sup>3)</sup> gegründeten Methoden zur Bestimmung des Atomgitters Kenntnis von dem Kristallsystem des zur Untersuchung vorliegenden Materials und größere ausgebildete Kristalle erfordern, erreicht das von Debye und Scherrer<sup>4)</sup> angegebene Verfahren dasselbe Ziel, auch wenn die kristallographischen Verhältnisse des Stoffes von vornherein vollkommen unbekannt sind. Da weiter keine großen Kristalle beim letzteren Verfahren notwendig und sonst die experimentellen Anordnungen sehr einfach sind, dürfte wohl diese Methode einer allgemeineren Anwendung fähig sein.

In der vorliegenden Mitteilung wird nun eine neue Anordnung beschrieben, welche dem Grundgedanken nach sich der Methode von Debye und Scherrer anschließt, deren Vorzug vor allem aber in einer größeren Meßgenauigkeit begründet ist. Hier soll zunächst die Methode auseinandergesetzt werden. Ferner werden einige Beispiele für ihre Verwendung angeführt, in einer späteren Abhandlung soll dann über weitere nach diesem Verfahren gemachte Kristallgitterbestimmungen berichtet werden.

Das Prinzip der Debye-Scherrer-Methode ist bekanntlich folgendes: In einem Aggregat von sehr kleinen Kristall-

1) Die Methode ist vor kurzem unabhängig von Hrn. H. Seemann angegeben; vgl. hierzu seine Nachschrift bei der Korrektur Ann. d. Phys. 59. S. 464. 1919.

2) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Sitzungsber. München 1912. S. 303; zusammenfassende Darstellung: M. v. Laue, Encycl. d. Math. Wiss. V., S. 457. 1919.

3) W. H. u. W. L. Bragg, X-Ray and crystal structure London 1915. Zeitschr. f. anorg. Chem. 90. 1915.

4) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916; 18. S. 291. 1917.

körnern, die vollkommen regellos geordnet sind, kommen die Kriställchen, und somit die Netzebenen in allen möglichen Orientierungen vor. Ein solches Pulver, zu einem dünnen Stab gepreßt, wird von einem Bündel monochromatischen Röntgenlichtes durchstrahlt. Wenn ein Kristallkorn zufälligerweise so liegt, daß die von Bragg eingeführte Bedingung

$$(1) \quad n \lambda = 2d \sin \varphi,$$

worin  $d$  den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Netzebenen,  $\varphi$  den Winkel zwischen der Richtung dieser Netzebenen und dem einfallenden Strahl,  $\lambda$  die Wellenlänge der Röntgenstrahlung und  $n$  eine kleine ganze Zahl bedeutet, erfüllt ist, so reflektiert es den einfallenden Strahl, in allen anderen Fällen nicht. Weil nun wegen der verschiedenen Lagen der Kristallkörner alle möglichen Winkel  $\varphi$  vorhanden sind, wird der einfallende Strahl in verschiedene, bestimmte Richtungen abgelenkt, von denen jede einem bestimmten Netzebenenabstand entspricht. Dieser Ablenkungswinkel ist natürlich nicht auf eine Ebene beschränkt, sondern der Strahl wird in allen möglichen Richtungen abgelenkt, die mit der Einfallrichtung den Winkel  $2\varphi$  bilden, beschreibt also um den einfallenden Strahl als Achse einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel  $2\varphi$ . Um diese Ablenkungswinkel zu bestimmen, brachten Debye und Scherrer ein Kristallstäbchen in der Mitte einer zylinderförmigen Kamera an, an deren Wand ein Film ausgespannt war. Da, wo die Kegelflächen den Film schneiden, entstehen also gekrümmte Linien; durch Bestimmung des Abstandes dieser Linien vom Treffpunkt des direkten Strahles mit dem Film können die Ablenkungswinkel ermittelt werden.

Ist die einfallende Strahlung hart genug, um das Stäbchen vollkommen zu durchdringen, so wird die Breite der Interferenzlinie ungefähr gleich der Dicke des Stabes, also gleich 1 bis 2 mm. Diese Breite der Linien bringt natürlich eine gewisse Ungenauigkeit der Messung mit sich, besonders bei kleinen Winkeln, wodurch die mathematische Auswertung erheblich erschwert werden kann, namentlich wenn linienreiche Aufnahmen vorliegen.

Wenn infolge Absorption die Strahlung nur bis zu einer gewissen Tiefe in die zerstreue Substanz eindringt, müssen an den ausgemessenen Winkeln nicht unbedeutende Korrekturen vorgenommen werden, wie A. J. Bijl und N. H. Kolk-

meyer<sup>1)</sup> nachgewiesen haben. Nach ihnen muß von dem durch die Ausmessung erhaltenen Werte von  $\sin^2 \varphi$  der Betrag

$$\frac{r}{4R} \sin 2\varphi \left[ \frac{R}{d} + \cos 2\varphi + \sqrt{\frac{R^2}{d^2} + \frac{R}{d} \cos 2\varphi + 1} \right]$$

subtrahiert werden, worin  $r$  den Radius des zirkulären Querschnittes des Stabes,  $R$  den Radius der Kamera und  $d$  den Abstand zwischen dem Zentrum der Kamera und der Eintrittsöffnung des Strahlenbündels bedeuten soll. In den von Bijl und Kolkmeijer gemachten Aufnahmen kann diese Korrektion für kleinere Ablenkungswinkel bis zu 14% betragen.

Die nachfolgend beschriebene Methode ist frei von einer solchen Korrektion. Die Anordnung ist folgende:

Das Kristallpulver wurde so gepreßt, daß eine Fläche zylindrischer Krümmung entsteht von demselben Radius, wie die ebenfalls zylinderförmige Kamera. Fig. 1 zeigt einen schematischen Grundriß der Kamera. Durch den Spalt  $S$  tritt ein divergentes monochromatisches Röntgenstrahlenbündel ein, trifft die zerstreuernde Substanz  $K$ , an der es abgelenkt wird, in demselben Sinn wie bei der Debye-Scherrer-Anordnung. Greifen wir also einen Strahl aus diesem Bündel heraus und betrachten die Reflexion an einer bestimmten Netzebene (Abstand  $d$ ), so wird der Strahl um einen Winkel  $2\varphi$  aus seiner Einfallsrichtung abgelenkt nach der Gleichung (1). Alle Strahlen des Bündels werden — Reflexion an derselben Netzebene vorausgesetzt — um denselben Winkel  $2\varphi$  abgelenkt, treffen also, wie aus einer einfachen geometrischen Überlegung zu ersehen ist, in einem Punkte  $A$  zusammen, wo ein scharfes Bild von dem Punkte  $S$  zu erwarten ist. Eine andere Netzebene (Abstand  $d_1$ ) lenkt die einfallenden Strahlen um den Winkel  $2\varphi_1$  ab, erzeugt also im Punkte  $B$  ein anderes Spaltbild usw. Durch die Anwendung der gekrümmten Reflexionsfläche wird also eine Art fokussierender Wirkung erreicht. Ist die Länge des Zirkelbogens  $SKA = l$  und der Radius der Kamera  $R$  bekannt, so läßt sich der Ablenkungswinkel  $2\varphi$  berechnen nach der Gleichung:

$$(2) \quad 2\varphi = \frac{l}{2R}.$$

1) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeijer, Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen at Amsterdam. 21. S. 494 u. 501. 1919.

Im unteren Teil der Fig. 1 ist eine Vertikalprojektion der Kamera angedeutet. Hier bedeutet  $S_1 S_5$  den Spalt,  $M_1 F_1 H N$  die Projektion des „Spiegels“  $K$  und  $F_1 G_1 I H$  die der Kamera-  
wand  $F A B G$ . Jeder von den einfallenden Strahlen  $S_1 D_1$ ,

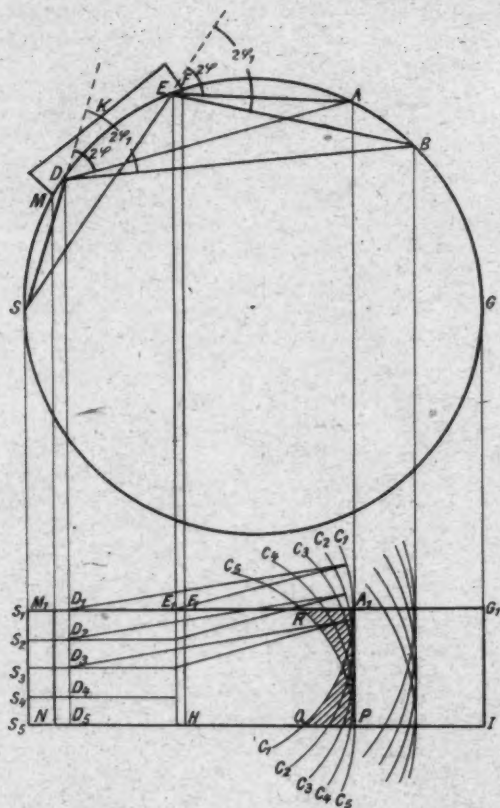


Fig. 1.

$S_2 D_2$  usw. wird, wie oben gesagt, um den Winkel  $2\varphi$  abgelenkt und beschreibt um die Einfallsrichtung einen Kegel, der als Schnittlinie zwischen diesem Kegel und dem zylinderförmigen Film zu erkennen ist (Kurven  $C$ ). Alle diese Kurven haben

eine gemeinsame Tangente  $A_1 P$ , deren Lage dem Punkte  $A$  entspricht. Beim Überlagern aller Kurven  $C$  entsteht also ein Bild auf dem Film von der in Fig. 1 angedeuteten Form des schraffierten Gebietes  $RA_1 PQ$  mit einer scharfen nach Gleichung (2) definierten Kante  $A_1 P$ . Die genaue Gestalt der Kurven  $C$  und somit die Form und Breite des Interferenzbildes läßt sich natürlich ohne größere Schwierigkeiten berechnen, ist aber von nebensächlichem Interesse. Die Hauptsache ist, daß die Kante des Bildes scharf und geometrisch definiert ist.

Die Breite des Interferenzbildes ist, wie aus der Konstruktion Fig. 1 hervorgeht, von den Dimensionen des „Spiegels“  $K$  abhängig und um so kleiner, je kleiner die Höhe  $M_1 N$  desselben gemacht wird. Weiter nimmt die Breite der Linie ab mit wachsendem Abstände der Linie vom „Spiegel“, bis der Ablenkungswinkel  $2\varphi = 90^\circ$  wird, wo eine gerade Linie von der Breite des Spaltes zu erwarten ist. Für Ablenkungswinkel größer als  $90^\circ$  wächst wieder die Breite der Linien und die scharfe Kante liegt von da ab auf der entgegengesetzten Seite.

Größere Spaltbreite gibt auch eine größere Breite der Linie, jedoch ohne die ursprüngliche Lage der Linienkante zu beeinflussen, wie aus Fig. 2 hervorgeht. Die scharfe Bildkante  $A$  entspricht stets der Spaltkante  $S$ , weshalb aufs sorgfältigste dafür gesorgt werden muß, daß diese in die richtige Lage (Innenfläche der Kamera wand) eingefügt wird. Obgleich die Breite der Interferenzlinie nicht

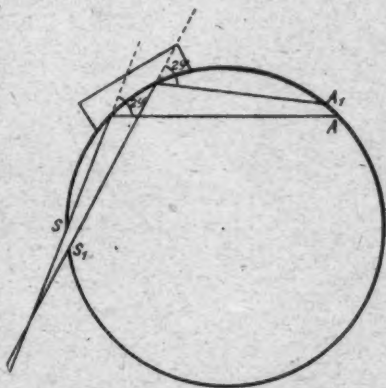


Fig. 2.

auf die Meßgenauigkeit einwirkt, muß sie doch innerhalb gewisser Grenzen gehalten werden, weil bei zu großer Breite die scharfe Kante einer Linie von dem diffusen Teil der folgenden verdeckt werden kann.



Die Eindringungstiefe der Strahlung in die Kristallmasse ist ebenfalls ohne Einwirkung auf die Lage der scharfen Kante

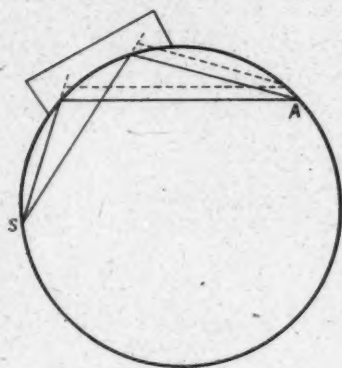


Fig. 3.

der Linie, wie aus Fig. 3 hervorgeht. Hier bedeuten die gestrichelten Linien den Weg der von Kristallteilchen im Inneren der Kristallmasse reflektierten Strahlen.

Die Aufnahme Nr. 1 bestätigt die oben gegebene Auseinandersetzung. Sie wurde mit Aluminiumpulver als reflektierende Substanz gemacht. Die Spaltbreite war ungefähr 1 mm. In den folgenden Aufnahmen wurde nur ein schmaler,

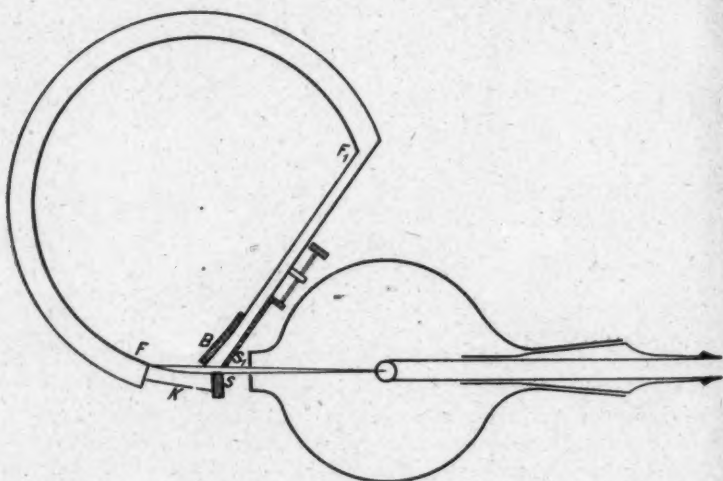


Fig. 4.

der Höhe des Spiegels entsprechender Filmstreifen verwendet, da nur dieses Stück des Bildes zur Ausmessung dienen kann.

Kamera und Röntgenröhre sind in ihrer gegenseitigen Lage in Fig. 4 dargestellt.  $SS_1$  ist der Spalt aus Blei, dessen eine Kante  $S_1$  mit einer Schraube verschiebbar ist,  $B$  eine Blende, die verhindern soll, daß die Strahlung vom Spalte direkt den Film  $FF_1$  trifft. Im Punkte  $F$  wurde ein feiner Strich auf den Film gemacht, von wo aus die Lagen der Interferenzlinien gemessen wurden. Die Länge des Bogens  $FKS$

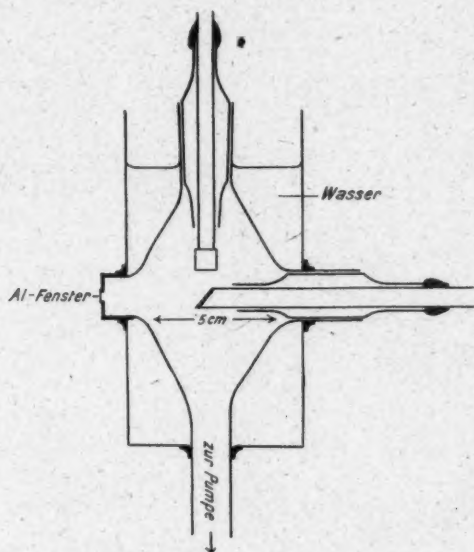


Fig. 5.

beträgt 22,4 mm, der Radius der Kamera 40,2 mm. Die Spiegel wurden mit einem Stempel von rechtwinkligem Querschnitt und zylindrisch gekrümmter Endfläche (Radius gleich dem Radius der Kamera) hydraulisch gepreßt.

Als Strahlungsquelle wurde eine Röntgenröhre mit Glühkathode und Kupferantikathode verwendet (Fig. 5). Um den Abstand Antikathode—zerstreuende Substanz so klein wie zugänglich zu machen, wurden die Dimensionen der Röhre möglichst reduziert (der Durchmesser der Kugel ungefähr 5 cm). Die Strahlung trat durch ein Aluminiumfenster von 0,05 mm



Dicke aus der Röhre heraus. Kathode und Antikathode waren in Glasschliffen mit Siegelack eingekittet. Die Glühspirale der Kathode bestand aus 0,2 mm dickem Wolframdraht, von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin bezogen. Die Röhre wurde mit Kühlwasser umgeben, außerdem wurde sowohl Kathode als Antikathode mit fließendem Wasser gekühlt. Die Stromstärke durch die Röhre konnte bis 30 M.A. gesteigert werden bei einer Spannung von ungefähr 15000 Volt. Während des Betriebes war die Röhre dauernd mit der Vakuumpumpe verbunden (Diffusionspumpe nach Gaede). Die Belichtungszeiten betrugen im allgemeinen 2 Stunden. Es wurde Röntgenfilm von der Firma O. Perutz, München, verwendet.

### Drei Aufnahmen. (Vgl. Tafel I.)

#### 1. Thorium.

Die Aufnahme Nr. 2 ist mit Thorimpulver als reflektierender Substanz gemacht. Durch einen unvorhergesehenen Zufall hatte der Brennfleck während der Belichtung dieser Aufnahme die Kante der Antikathodenfläche getroffen, wo die Kupferplatte an Messing gelötet war.

Tabelle 1.

Cu <sub>α</sub> -Strahlung		Cu <sub>β</sub> -Strahlung			Zn <sub>α</sub> -Strahlung		
<i>l</i>	sin <i>φ</i>	<i>l</i>	sin <i>φ</i>	Cu <sub>α</sub> /Cu <sub>β</sub>	<i>l</i>	sin <i>φ</i>	Cu <sub>α</sub> /Zn <sub>α</sub>
41,5	0,256	37,4	0,229	1,114	38,5	0,238	1,076
48,1	0,295	43,0	0,265	1,113	44,5	0,274	1,077
70,0	0,422	62,4	0,379	1,112	64,7	0,392	1,077
83,5	0,497	74,4	0,447	1,112	77,1	0,462	1,076
87,5	0,518	79,1	0,473	1,100	80,9	0,483	1,076
102,5	0,596						
114,9	0,656				105,1	0,609	1,078
118,4	0,671				108,5	0,625	1,073
133,2	0,737				121,9	0,689	1,072
143,4	0,779						

Es war deshalb zu vermuten, daß eine neue Wellenlänge, die des Zinks, hinzukam, welches auch eine einfache Untersuchung bestätigt. Das Diagramm würde sich dann aus drei Serien von Linien zusammensetzen mit den Wellenlängen

$$\text{Cu}_\alpha = 1,54, \quad \text{Cu}_\beta = 1,39, \quad \text{Zn}_\alpha = 1,43 \text{ \AA.-E.},$$

von denen Cu<sub>α</sub> die größte, Cu<sub>β</sub> die kleinste Intensität besitzt. (Zn<sub>α</sub> ist, wie aus dem Folgenden zu sehen ist, zu schwach, um

auf dem Film sichtbar zu werden.) Diese Zusammensetzung der Strahlung stört indessen nicht die Berechnung, liefert im Gegenteil eine wertvolle Kontrolle.

Wenn die drei Arten der Strahlung an derselben Netzebene reflektiert vorkommen, müssen nach Gleichung (1) die zugehörigen Werte von  $\sin \varphi$  sich wie die betreffenden Wellenlängen verhalten. Wir suchen also zuerst unter Berücksichtigung der Intensitäten in der Reihe von beobachteten Größen von  $\sin \varphi$  je zusammengehörige Werte, für welche das Verhältnis  $1,54/1,39 = 1,108$  besteht. So wurden die in den Kolonnen 2 und 4 der Tab. 1 stehenden Werte von  $\sin \varphi$  ausgesondert, von denen je zwei in derselben Horizontalreihe stehenden das in der Kolonne 5 berechnete Verhältnis ergeben. Die Werte in der Kolonne 2 entsprechen also der  $\text{Cu}_\alpha$ -Strahlung, die in der Kolonne 4 der  $\text{Cu}_\beta$ -Strahlung. In derselben Weise wurden die  $\text{Zn}_\alpha$ -Linien identifiziert; die entsprechenden Werte von  $\sin \varphi$  sind in der Kolonne 7 wiedergegeben. Wenn aus den Mittelwerten der gefundenen Verhältnisse in den Kolonnen 5 und 8  $\text{Cu}_\beta$  und  $\text{Zn}_\alpha$  berechnet werden, erhält man, wenn  $\text{Cu}_\alpha$  gleich 1,54 gesetzt wird:  $\text{Cu}_\beta = 1,38$  und  $\text{Zn}_\alpha = 1,49$ , was mit den oben angeführten Werten der Wellenlängen gut übereinstimmt.

Weil alle beobachteten Linien in der Tab. 1 untergebracht sind, und die Konstanz der Verhältnisse  $\text{Cu}_\alpha/\text{Cu}_\beta$  und  $\text{Cu}_\alpha/\text{Zn}_\alpha$  nichts zu wünschen übrig läßt, können wir die Einteilung der Linien als zuverlässig ansehen und jede von den drei Serien benutzen, um das Atomgitter zu ermitteln. — In den Kolonnen 1, 3 und 6 der Tab. 1 sind außerdem die Abstände  $l$  der Linien von der Spaltkante  $S$  (Fig. 4) angegeben.

Für Thorium ist nach Brögger<sup>1)</sup> eine reguläre Struktur zu erwarten. Die beobachteten Werte von  $\sin \varphi$  würden sich in diesem Falle nach der Gleichung<sup>2)</sup>:

$$(3) \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{a} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$$

berechnen lassen, wo  $h_1, h_2, h_3$  die kristallographischen Indizes derjenigen Netzebene bedeuten, die die Strahlung unter dem Winkel  $\varphi$  reflektiert und  $a$  die Kantenlänge des kubischen Elementarbereiches des Atomgitters ist. Wie man aus der

1) W. C. Brögger, Zeitschr. f. Krystall. 7. S. 442. 1883.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916.

Tab. 2 ersieht, ist dieses wirklich der Fall. Darauf deuten die konstanten Verhältnisse

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

hin. Hieraus läßt sich also  $a$  berechnen. Man findet als Wert für  $a$  den drei Strahlungskomponenten entsprechend

$$5,13 \cdot 10^{-8}; \quad 5,11 \cdot 10^{-8}; \quad 5,11 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

eine Übereinstimmung, die als recht gut zu bezeichnen ist.

Wenn das spezifische Gewicht des Thoriums gleich 11 gesetzt wird, erhält man für das Gewicht des Elementarwürfels  $1510 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ . Das absolute Gewicht des Thoriumatoms ist  $232 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 385 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ . Der Elementarbereich enthält also 4 Atome.

Wir haben also die kubische Struktur des Thoriums bestätigt und weiter festgestellt, daß es von 4 ineinander geschalteten kubischen Gittern mit der Kantenlänge  $a$  aufgebaut ist. Es bleibt noch übrig zu ermitteln, in welcher Weise diese 4 Gitter ineinander geschaltet sind.

Aus Kolumne 1 der Tab. 2 geht hervor, daß nur Netzebenen mit ungemischten Indizes Interferenzlinien erzeugen. Dieses deutet darauf hin, daß das Gitter ein flächenzentriertes ist. Der Strukturfaktor  $S^1$ ) wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i (h_1 + h_2)} + e^{\pi i (h_1 + h_3)} + e^{\pi i (h_2 + h_3)},$$

verschwindet also, wenn nicht die Indizes entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Nach Debye<sup>2)</sup> ist die Intensität  $J$  einer Interferenzlinie mittels des Ausdruckes

$$(4) \quad J = K \frac{(1 + \cos^2 2\varphi) n |S|^2}{\sin^2 \varphi}$$

zu berechnen, wo  $K$  ein Proportionalitätsfaktor und  $n$  die sogenannte Kombinationszahl ist, d. h. die Zahl der Netzebenen, die zur Bildung einer Interferenzlinie zusammenwirken.

1) M. v. Laue, a. a. O.

2) P. Debye, Phys. Zeitschr. 18. S. 483. 1917.

Tabelle 2.

Cu <sub>α</sub> -Strahlung					Cu <sub>β</sub> -Strahlung					Zn <sub>α</sub> -Strahlung				
$h_1$	$h_2$	$h_3$	$\sin \varphi$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensität beob. ber.	$\sin \varphi$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensität beob. ber.	$\sin \varphi$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensität beob. ber.			
1	1	1	0,256	0,149	<i>ss</i> (1)	0,229	0,132/	<i>s - m</i>	0,238	0,138	<i>m</i>	27		
2	0	0	0,295	0,148	<i>st</i>	0,265	0,132	<i>s</i>	0,274	0,138	<i>s</i>	14		
2	2	0	0,422	0,150	<i>st</i>	0,379	0,134	<i>s</i>	0,392	0,139	<i>s</i>	11		
3	1	1	0,497	0,150	<i>st</i>	0,447	0,135	<i>s</i>	0,462	0,139	<i>s</i>	14		
2	2	2	0,518	0,150	<i>m</i>	0,473	0,136	<i>ss</i>	0,483	0,139	<i>ss</i>	4		
4	0	0	0,596	0,149	<i>ss</i>									
3	3	1	0,656	0,150	<i>m - st</i>				0,609	0,140	<i>s</i>	8		
4	2	0	0,671	0,150	<i>s - m</i>				0,625	0,140	<i>s</i>	6,5		
4	2	2	0,737	0,150	<i>s</i>				0,689	0,140	<i>ss</i>	5		
3	3	3												
5	1	1	0,779	0,150	<i>s - m</i>									

1) Die Bezeichnung der geschätzten Intensitäten ist folgende: *ss* = sehr stark, *st* = sehr schwach, *m* = mittel, *s* = schwach, *ss* = sehr schwach.

In der Tab. 2 sind die nach dieser Formel berechneten relativen Intensitäten zum Vergleich mit den beobachteten angegeben. Weil auch in dieser Hinsicht eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung vorliegt, können wir also feststellen, daß das Atomgitter von Thorium ein kubisches, flächenzentriertes mit der oben ermittelten Kantenlänge  $a$  ist.

In der 4. Gruppe des periodischen Systems, die hinsichtlich des Raumgitters die am besten ausgeforschte ist, sind also jetzt fünf Elemente untersucht worden, nämlich:  $\text{C}^1$ ),  $\text{Si}^2$ ),  $\text{Sn}^3$ ),  $\text{Pb}^4$ ), Th.

## 2. Nickel.

Aufnahme Nr. 3 ist mit Nickelpulver als zerstreuer Substanz gemacht. Dieses Bild wurde von reiner Kupferstrahlung erzeugt. Die  $\text{Cu}_\beta$ -Linien sind nicht auf der Platte zu sehen, wahrscheinlich wegen der recht starken kontinuierlichen Schwärzung derselben.

Über die Kristallform des Nickels legen nur ganz unbestimmte Angaben vor, nach welchen dieselbe kubisch wäre.<sup>5)</sup> Schon die Einfachheit des Diagramms läßt auch eine kubische Struktur vermuten. Wie eine nähere Untersuchung ergibt, lassen sich die Werte von  $\sin \varphi$  nach der Gleichung (3) berechnen, was aus dem konstanten Verhältnis

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

hervorgeht (Tab. 3).

Tabelle 3.

$l$	$\sin \varphi$	$h_1 \ h_2 \ h_3$	$\sin \varphi$	Intensität	
			$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$	beob.	ber.
61,8	0,375	1 1 1	0,217	<i>s s t</i>	8,8
72,1	0,434	2 0 0	0,217	<i>s t</i>	4,2
106,5	0,616	2 2 0	0,218	<i>s t - m</i>	3,4
129,7	0,723	3 1 1	0,218	<i>s t</i>	4,8
137,4	0,755	2 2 2	0,218	<i>s</i>	1,4

1) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 18. S. 291. 1917.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916.

3) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeyer, u. a. O.

4) L. Vegard, Phil. Mag. 32. S. 65. 1916.

5) J. A. Ewing u. W. Rosenhain, Trans. Roy. Soc. London 1900. 193A. S. 353.

Auf dieselbe Weise, wie im vorigen Falle, erhalten wir hier  $a = 3,53 \cdot 10^{-8}$  cm. Setzen wir das spezifische Gewicht des Nickels gleich 8,8, erhalten wir für das Gewicht des Elementarkubus  $988 \cdot 10^{-24}$  g. Das absolute Gewicht des Nickelatoms beträgt  $97,4 \cdot 10^{-24}$  g. Ein Elementarbereich des Gitters enthält also 4 Atome. Weil keine gemischte Indizes vorkommen, andererseits aber die beobachteten Linien allen überhaupt möglichen ungemischten Indizes angehören, die innerhalb des Beobachtungsgebietes fallen, schließen wir, daß wir es auch in diesem Falle mit einem flächenkonzentrierten Gitter zu tun haben. Dieses wird auch durch die Übereinstimmung der nach Formel (4) berechneten Intensitäten mit den beobachteten bestätigt.

Das Atomgitter des gewöhnlichen ( $\alpha$ )-Nickels ist also ein flächenzentriertes kubisches mit der Kantenlänge

$$a = 3,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Unter den bis jetzt hinsichtlich des Baumgitters untersuchten Elementen haben die in der folgenden Tabelle zusammengestellten kubische flächenzentrierte Gitter. In der zweiten Reihe ist die Kantenlänge des Elementarwürfels angegeben.

Al <sup>1)</sup>	$4,07 \cdot 10^{-8}$ cm
Ni ( $\alpha$ )	3,53    „
Cu <sup>2)</sup>	3,61    „
Ag <sup>3)</sup>	4,06    „
Sn (grau)	6,46    „
Au <sup>4)</sup>	4,07    „
Pb	4,91    „
Th	5,12    „

### 3. Magnesium.

(Aufnahme 4.) Nach demselben Verfahren wie bei Thorium beschrieben, wurden die von den beiden Strahlungskomponenten  $\text{Cu}_\alpha$  und  $\text{Cu}_\beta$  herrührenden Linien getrennt. Es ergab sich dann, daß diejenigen Linien, die in der Tab. 4 mit  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $f'$ ,  $h'$ ,  $j'$  bezeichnet sind,  $\beta$ -Linien sind, reflektiert an den-

1) P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 19. S. 23. 1918.

2) W. H. Bragg, Phil. Mag. 28. S. 355. 1914.

3) L. Vegard, Phil. Mag. 31. S. 83. 1916.

4) L. Vegard, Phil. Mag. 32. S. 65. 1916.



selben Netzebenen, wie die  $\alpha$ -Linie  $a, b, c, d, f, h, j$ . Die übrigen sind alle  $\alpha$ -Linien, deren entsprechende  $\beta$ -Linien zu schwach sind, um auf dem Film sichtbar zu werden.

Tabelle 4.

	$l$	$\sin^2 \varphi$		$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$n$	Intensität	
		beob.	ber.			beob.	ber.
$a'$	39,9	0,0605					
$b'$	42,6	0,0687					
$a$	44,2	(0,0739); 0,0755 <sup>1)</sup>	0,0755	110 (100)	1	$m$	2,3
$c'$	45,4	0,0779					
$b$	47,6	(0,0853); 0,0860 <sup>1)</sup>	0,0860	002	1	$st$	2,0
$c$	50,6	(0,0960); 0,0967 <sup>1)</sup>	0,0970	111 (101)	2	$stst$	3,4
$d'$	58,9	0,128					
$d$	66,1	0,160	0,162	112 (102)	2	$st-m$	1,8
$f'$	70,9	0,183					
$e$	72,5	0,191	0,193	003	1	$ss$	0,7
$k'$	77,9	0,218					
$f$	79,5	0,226	0,227	1-10 (120)	1	$m-s$	0,6
$g$	83,4	0,247	0,248	1-11 (121)	2	$ss$	1,0
$f'$	84,6	0,253					
$h$	87,5	0,268	0,269	113 (103)	2	$m$	0,9
$i$	93,4	0,302	0,302	220, 200	3	$ss$	1,1
$j$	95,1	0,313	0,313	1-12 (212)	2	$m$	0,8
$k$	97,2	0,324	0,324	201, 221	6	$m$	2,3
$l$	100,6	0,344	0,344	004	1	$s$	0,3
$m$	108,0	0,387	0,388	222, 202	6	$s$	1,8
$n$	113,3	0,420	0,420	1-13, 114 (123)	4	$s$	0,9
$o$	125,8	0,498	0,496	203, 223	6	$s$	1,2
$p$	134,7	0,554	0,550	131 (231)	4	$s$	0,7
$q$	138,1	0,575	0,571	1-14 (124)	2	$ss$	0,4
$r$	145,4	0,619	0,615	132 (232)	4	$s$	0,7

Schon die große Anzahl der Linien dieser Aufnahme deutet auf ein Gitter von niedrigerer Symmetrie als in den oben besprochenen Fällen. Eine ähnliche Untersuchung zeigt auch, daß die Gleichung (8) nicht die beobachteten Linien wiedergeben kann. Der Berechnung müssen dann die von Debye und Scherrer zusammengestellten<sup>2)</sup>, für ein beliebiges Kristallsystem geltenden Formeln zugrunde gelegt werden. Nach

1) Aus der Linie 2. Ordnung ermittelt. Weil die eine Ecke des Films bei dieser Aufnahme von der Kamerawand sich losgelöst hatte, sind die ersten Linien etwas schräg.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 18. S. 291. 1917. A. Johnson u. O. Toeplitz, Phys. Zeitschr. 19. S. 47. 1918.





bilden, so vereinfacht sich die Formel (5) zu:

$$(7) \quad x(h_1^2 + h_2^2 - h_1 h_2) + y h_3^2 = \sin^2 \varphi,$$

worin  $x = \frac{k_{11}}{4}$  und  $y = \frac{k_{33}}{4}$  zwei mit den Beobachtungen zu berechnende Größen sind.

Die drei ersten Formeln unter (6) werden für diesen Spezialfall:

$$a^2 = b^2 = \frac{\lambda^2}{3x}; \quad c^2 = \frac{\lambda^2}{4y}.$$

Nach einer Methode, die von Johnsen und Toeplitz<sup>1)</sup> beschrieben ist, wurden jetzt  $a$  und  $b$  so bestimmt, daß sich die beobachteten Werte von  $\sin^2 \varphi$  aus der Gleichung (7) berechnen ließen. Es zeigte sich, daß, wenn

$$(8) \quad x = 0,0755 \quad \text{und} \quad y = 0,0215$$

gesetzt wird, die Gleichung (7) sich mit großer Genauigkeit den beobachteten Werten anschließt.

In den Spalten 3 und 4 der Tab. 4 sind die beobachteten und berechneten Werte von  $\sin^2 \varphi$  zum Vergleich angeführt; daneben stehen die Indizes der Netzebenen. Die Übereinstimmung ist überraschend gut, indem die größten Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten von  $\sin^2 \varphi$  ungefähr 1% betragen.

Aus den Formeln (8) berechnet sich jetzt

$$a = b = 3,23 \cdot 10^{-8} \text{ cm}; \quad c = 5,25 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Diese Gestalt des Elementarbereiches entspricht einem Raumgitter von gerade übereinander in dem Abstände  $c$  gelagerten Atomschichten, von dem in Fig. 6 angegebenen Bau. Diese Tatsache steht in gutem Einklang mit den von Hlawatsch an ausgebildeten Magnesiumkristallen ausgeführten kristallographischen Messungen. Für die dihexagonal-bipyramidalen Kristalle findet er das Achsenverhältnis  $a:c = 1:1,624$ , während die hier ermittelten Maße des Elementarbereiches  $a:c = 1:1,625$  geben.

Es bleibt noch übrig zu ermitteln, wieviele solche Gitter ineinander gestellt sind. Wenn das spezifische Gewicht des Magnesiums gleich 1,7 gesetzt wird, erhält man als Gewicht

1) A. Johnsen u. O. Toeplitz, a. a. O.

des Elementarbereichs  $80,7 \cdot 10^{-24}$  g. Das wirkliche Gewicht eines Magnesiumatoms beträgt  $40,3 \cdot 10^{-24}$  g. Ein Elementarbereich muß also zwei Magnesiumatome enthalten.

Schwierigkeiten treten indessen auf, wenn es gilt zu entscheiden, wie diese zwei Gitter gegeneinander verschoben sind. Am nächsten liegt es, an eine Verschiebung längs der hexagonalen (*c*)-Achse zu denken. Daß eine solche nicht (was am einfachsten scheint)  $c/2$  sein kann, geht daraus hervor, daß in diesem Falle alle Interferenzlinien mit ungeraden  $h_3$  verschwinden müßten; mehrere solche sind aber vorhanden, wie aus der

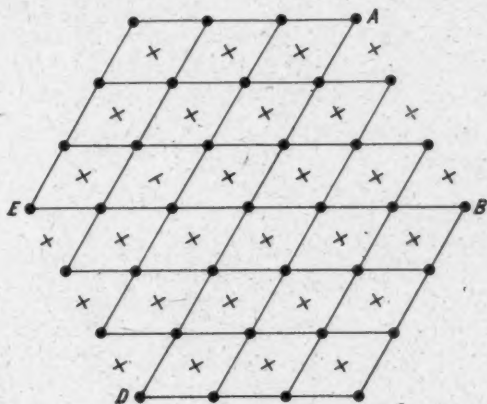


Fig. 6.

Tab. 4 zu ersehen ist. Eine gegenseitige Verschiebung um ungefähr  $\frac{1}{6}$  von der *c*-Achse würde mit der Tatsache gut übereinstimmen, daß die Linie *c* (008) bedeutend schwächer ist, als *l* (004), würde aber ein sehr unwahrscheinliches Bild vom Raumgitter ergeben.

Als unmöglich erweist sich das Anbringen des zweiten Atoms im Zentrum des Elementarkörpers. Es würde das Ausfallen von allen Interferenzlinien, deren Indizesumme ungerade ist, bedeuten.

Eine gegenseitige Verschiebung in der Basisbene (Ebene der Fig. 6) würde kein Verschwinden von vorhandenen Linien zur Folge haben. In diesem Falle wird die größte Symmetrie

erreicht, wenn das zweite Atom in der Mitte von der Basisfläche des Elementarbereiches angebracht wird. Dieses würde, wie aus der Figur zu ersehen ist, bewirken, daß zwei gegenüberliegende Prismaflächen ( $AB$  und  $DE$ ) dichter mit Atomen besetzt werden würden, als die anderen vier Flächen derselben Art. Möglicherweise spricht für eine solche Anordnung die von Hlawatsch beobachtete Tatsache, daß die Magnesiumkristalle oft längs einer Nebenachse verlängert sind. In der Tab. 4, Kolumne 8, sind die Intensitäten der Linien dieser Anordnung der beiden Gitter entsprechend nach Formel (4) berechnet. Der Strukturfaktor wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i(h_1 + h_2)},$$

woraus hervorgeht, daß alle Netzebenen, für welche  $h_1 + h_2$  eine ungerade Zahl ist, nicht reflektieren. Diese Indizeskombinationen sind in der Tabelle eingeklammert. In der Spalte 6 sind die Kombinationszahlen der verschiedenen Indizestriplets angegeben.

Wahrscheinlich hat außerdem ein anderer Faktor auf die Intensitätsverteilung eingewirkt. Eine mikroskopische Untersuchung des Metallpulvers zeigte, daß dieses aus sehr dünnen Blättchen bestand von der ungefährlichen Dicke  $\frac{1}{300}$  mm, deren Fläche aber eine Ausdehnung von mehreren Zehnteln Millimeter haben konnte. Nach Hlawatsch ist die Basisfläche der hexagonalen Säulen eine bevorzugte Spaltungsfläche. Die Anordnung der Kristallkörner ist nun wegen der Gestalt der Teilchen keine vollkommen regellose, was im Diagramm vor allem dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Intensität der Reflexion an der Basisfläche (002) größer wird, als berechnet, während die von den Prismaflächen (110) entsprechend schwächer ausfällt. In welchem Maße der erwähnte Umstand auf die Intensitäten einwirkt, läßt sich aus diesem einzelnen Falle nicht beurteilen. Jedenfalls scheint es möglich, die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Intensitäten, dadurch zu erklären.

Um sich die Unstimmigkeit zu erklären, wäre es auch möglich, anzunehmen, daß das Metall zweiatomig sein würde. Für einen solchen Fall würden wohl die gewöhnlichen für punktförmige Zerstreuungszentren abgeleiteten Formeln nicht ausreichen, um die Intensitätsverteilung des Interferenzbildes zu be-

rechnen. Eine geplante Untersuchung von mehreren Elementen der zweiten Gruppe des periodischen Systems, wo analoge Raumgitter zu erwarten sind, wird voraussichtlich die Frage betreffs Verschiebung der beiden Gitter endgültig entscheiden können.

#### Zusammenfassung.

1. Es wurde eine neue Anordnung ausgearbeitet, nach welcher mittels einer zylinderförmig gekrümmten Zerstreuungsfäche aus gepreßtem Kristallpulver Interferenzlinien erzeugt werden, deren eine Kante scharf ist und sich geometrisch definieren läßt, weshalb eine Erhöhung der Meßgenauigkeit gegenüber der bisherigen Methode ermöglicht wird.

2. Es wurde gezeigt, daß die Schärfe und Lage der Linienkante unabhängig sind von der *Spaltbreite* und der *Eindringungstiefe* der Strahlung.

3. Es wurde mittels Aufnahmen nach der beschriebenen Methode die Raumgitter von Th, Ni und Mg ermittelt. Als Resultat ergab sich, daß Th und Ni flächenzentrische kubische Gitter besitzen. Mg ist aus zwei ineinander geschalteten einfachen hexagonalen Gittern aufgebaut.

Hrn. Professor Dr. F. Krüger bin ich für das große Interesse, das er für meine Arbeit gezeigt hat und für das bereitwilligste Zurverfügungstellen aller notwendigen Hilfsmittel zu großem Dank verpflichtet.

Ebenfalls möchte ich Hrn. Dr. Freiherrn von der Osten-Sacken für manche wertvolle Ratschläge danken.

Für die Arbeit standen auch Mittel der Jagorstiftung zur Verfügung, wofür auch hier der beste Dank ausgesprochen sei.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

## 2. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?<sup>1)</sup> von P. Ehrenfest.

„Warum hat unser Raum gerade drei Dimensionen?<sup>2)</sup> oder anders gefragt: „Welche *singulären*?) Vorkommnisse unterscheiden die Physik des  $R_3$  vor der in den übrigen  $R_n$ ?“ — So gestellt, sind die Fragen vielleicht sinnlos, jedenfalls fordern sie zur Kritik heraus. Denn „ist“ der Raum?, „ist“ er dreidimensional? Und vollends die Frage nach dem „warum“. Auch: was muß man unter „der“ Physik des  $R_4$  oder  $R_7$  verstehen?

Ich werde nicht versuchen, diesen Fragen eine minder anstößige Form zu geben. Glückt es, nur erst mehr und mehr singuläre Eigenschaften des  $R_3$  aufzufinden, dann wird schließlich von selber deutlich werden, welche „vernünftige“ Frage sich zu der gefundenen Antwort konstruieren läßt.

### § 1. Schwerkraft und Planetenbewegung.

Was die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper betrifft, so kann man feststellen, daß ein charakteristischer Unterschied zwischen  $R_3$  und  $R_2$  einerseits und allen höheren  $R_n$  andererseits besteht, was die Stabilität der Kreisbahn be-

1) Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung in Versl. d. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam 26. S. 105. 1917 (Sitzung v. 26. V. 1917) = Proceedings 20. S. 200. — Die interessante Bemerkung, die H. Weyl kürzlich über die Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt gemacht hat (Gravitation u. Elektrizität. Sitzungsber. preuß. Ak. 26. S. 474 oben. 1918; Neue Erweiterung der Relativtheorie. Ann. d. Phys. 50. S. 133 Mitte. 1919), veranlaßt mich, hier noch einmal meine Bemerkungen zusammenzustellen, obwohl ich mir dessen bewußt bin, daß sie sehr elementar sind und einzeln genommen den meisten gut bekannt sein dürften. Aber ich hoffe eben, daß vielleicht andere dann einen Anlaß finden werden, reicheres und besseres Material zu dieser faszinierenden Frage vorzulegen.

2) Vgl. hierzu „Schlußbemerkung 1“.



trifft. Während im  $R_3$  die Bewegung bei einer Störung im Endlichen bleibt, wenn die Energie nicht zu groß ist und dies im  $R_2$  sogar für jeden beliebigen endlichen Betrag der Energie der Fall ist, sind im  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  usw. die Kreisbahnen zwar natürlich auch noch möglich, aber bei jeder noch so kleinen Störung läuft der Planet längs einer Spirale in den Zentralkörper oder ins Unendliche.

Das Anziehungsgesetz im  $R_n$  setzen wir  $\propto \frac{Mm}{r^{n-1}}$ ; dazu gehört für  $n > 2$  eine potentielle Energie:

$$(1) \quad V(r) = -\alpha \frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}.$$

Dies entspricht natürlich der Annahme:

a) daß die Kraft nach dem Zentrum gerichtet und nur Funktion von  $r$  ist;

b) daß auch im  $R_n$  für die Schwerkraft das Theorem von Gauss über die Kraftlinienströmung gelten soll.

Man erhält so die Bewegungsgleichungen:

$$m \frac{d^2 x_h}{dt^2} = -\alpha \frac{Mm}{r^{n-1}} \frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \quad (h = 1, \dots, n).$$

Die Bahn ist eben. Einführung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  gibt für Energie und Flächensatz:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = E, \quad m r^2 \dot{\varphi} = \Theta.$$

Elimination von  $\dot{\varphi}$  gibt:

$$(2) \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^3 r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{A r^2 + B r^{4-n} - C^2},$$

wo  $A, B, C$  Konstanten sind, von denen die erste und letzte von den Beginndaten der Bewegung abhängt, insofern sie die Totalenergie  $E$  und die Konstante des Flächensatzes  $\Theta$  enthalten. Damit  $r$  bei der Bewegung zwischen zwei positiven Werten hin und her pendelt, ist nötig, daß  $\dot{r}$  reell ist und abwechselnd positive und negative Werte annimmt, also muß die Größe unter der Wurzel positiv sein zwischen zwei Werten von  $r$ , für die sie Null ist. Die Diskussion der Fälle, worin das vorkommt, läßt sich leicht geometrisch geben, indem man die Kurven  $y = A r^2$  und  $y = B r^{4-n}$  zeichnet, hieraus die Summenkurve skizziert und nachsieht, wie sie von  $y = C^2$



geschnitten wird.<sup>1)</sup> Entsprechend läßt sich auch der Fall  $n = 2$  behandeln, wo (1) ersetzt werden muß durch:

$$(1') \quad V = \alpha M m \lg r,$$

also (2) durch

$$(2') \quad \dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\alpha r^2 - \beta r^2 \lg r - \gamma},$$

wo

$$\alpha = \frac{2E}{m}, \quad \beta = 2\alpha M, \quad \gamma = \frac{G^2}{m^2}.$$

Das Resultat der Diskussion ist:

$n$	Kreisbahnen	Bewegungen zwischen zwei positiven Werten von $r$	Bewegung nach Unendlich
4, 5...	instabil	unmöglich!	möglich
3	stabil	möglich [geschlossene Bahn]	möglich
2	stabil	möglich [ungeschlossene Bahn]	unmöglich!

Bemerkungen:

1. Es sei bei dieser Gelegenheit an das Theorem von J. Bertrand (1873) erinnert<sup>2)</sup>: Die Bahnen eines materiellen Punktes, beschrieben unter Einfluß einer Zentralkraft, die nur Funktion des Abstandes ist, sind nur dann geschlossen, wenn die Kraft entweder proportional mit dem Abstand oder umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist.

2. Bemerkenswert ist, daß die Planetenbewegungen die den elliptischen entsprechen, auch im *nichteuklidischen*  $R_3$  geschlossen sind, falls man nur die Gleichungen der Mechanik und das Anziehungsgesetz zugleich diesem Raum anpaßt.<sup>3)</sup>

3. Man wird sich natürlich auch fragen, was aus dem Bohrschen *Atommodell* wird im  $R_n$  für  $n \neq 3$ . Modifiziert man das Gesetz der elektrischen Anziehung so wie das der

1) Vgl. die Figuren in Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam a. a. O. „Aanhangsel I“.

2) J. Bertrand, C. R. 77. S. 846. 1873.

3) H. Liebmann, Nichteukl. Geometrie (Samml. Schubert. 2. Aufl. 1912. S. 207).

Schwere und behält: a) die Quantisierung des Flächenmoments, b) den Ansatz  $v = \frac{E' - E}{h}$  bei, so sieht man alsbald, wie scharf das Bohrsche Modell gerade auf den  $R_3$  paßt: Für  $n = 4$  erhält man eine ganz arge Degeneration.<sup>1)</sup> Für  $n = 2$  erhält man Spektralserien mit Päuungsstelle im Unendlichen, weil ja im  $R_2$  unendlich viel Energie nötig ist, um das Elektron ins Unendliche zu werfen. Für  $n > 4$  sind vor allem natürlich höchstens die Kreisbahnen zu brauchen. Im Gegensatz zum  $R_3$  liegen hier die Bahnen wachsender Quantenzahl stets dichter und dichter beim Kern, und damit im Zusammenhang haben auch hier wieder die Spektralserien ihre Päuungsstellen im Unendlichen.<sup>2)</sup>

### § 2. Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld im $R_n$ .

Im  $R_n$  wird das elektrische Feld durch  $n$ -Komponenten bestimmt, das magnetische Feld durch  $\frac{n(n-1)}{2}$  Kennzahlen. Nur für  $n = 3$  fallen diese beiden Anzahlen zusammen und besteht also die weitgehende Dualität zwischen den beiden Feldern.

In der Tat seien  $x_1 \dots x_n$  und  $x_0 = ict$  die  $n+1$  Koordinaten der Raum-Zeit-Welt und  $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$  die Komponenten des retardierten Potentials (entsprechend dem Viererpotential in der zum  $R_3$  gehörigen Relativitätstheorie), so entsprechen die  $\frac{n(n-1)}{2}$ -Komponenten der Rotation:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \quad (h, k = 1, \dots, n)$$

dem magnetischen Feld und die  $n$ -Komponenten:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} \quad (h = 1, \dots, n)$$

dem elektrischen Feld.

Analoges ist bekanntlich zu sagen betreffs Translations-Rotationsgeschwindigkeit, Kraft-Drehmoment.

### § 3. Die Wellenausbreitung im $R_n$ .

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$$

1) a. a. O., „Anhangsel II“.

2) a. a. O., Ebenda.

haben im  $\xi$  für  $n=3$  folgende Eigenschaft: Hat man im Moment  $t=0$  überall  $\varphi=0$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0$  außer in einem kleinen Gebiet  $\gamma$ , dann ist in jedem späteren Moment  $t$  (wenn nur nicht zu klein genommen wird) noch überall  $\varphi=0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0$  außer in einer dünnen Schale zwischen zwei Oberflächen (vgl. Figur), die — falls  $\gamma$  klein genug ist, angenähert zwei konzentrische Kugeln sind um  $\gamma$ .

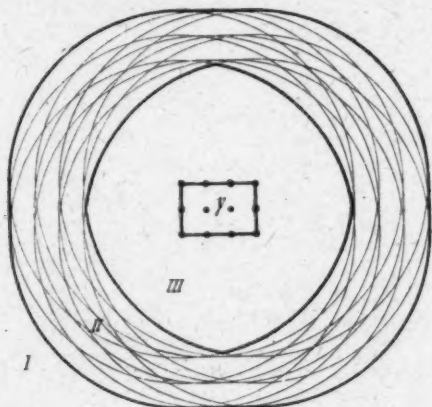


Fig. 1.

Im  $R_2$  ist es bekanntlich<sup>1)</sup> anders: Bei der Wellenausbreitung auf einer Membran hat man außer einer Störung in dem Ring, der II entspricht, auch noch eine (schwächere) Störung im ganzen inneren Gebiet III.

Alle  $R_{2n+1}$  verhalten sich in dieser Beziehung wie der  $R_3$ , alle  $R_{2n}$  analog wie der  $R_2$  (in dieser letzteren kann man also nicht das Prinzip von Huygens anwenden).<sup>2 u. 3)</sup> Aber unter

1) Vgl. z. B. Rayleigh, Theory of sound Ch. XIV, § 275.

2) Vgl. Duhem, Hydrodynamique T. I. Paris, Hermann Volterra, Acta Math. 1894; Hadamard, Bull. soc. franç. de phys. 1906 (dort andere Literatur, auch die älteren Arbeiten von Hadamard); Acta math. 31. S. 333. 1908; Lec. sur la propag. des Ondes (Paris Hermann 1903) Chap VII § 3.

3) Diese Tatsache steht rechnerisch in Beziehung zu der folgenden Tatsache: Die Formel für das Volumen einer Kugel im  $R_p$  enthält für

den  $R_{2n+1}$  zeichnet sich  $R_3$  durch eine Eigenartigkeit aus, die evident wird, wenn man das retardierte Potential berechnet<sup>1)</sup>, d. h. das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = \varrho.$$

Für  $R_3$  erhält man:

$$\varphi = \frac{1}{c_3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{[\varrho]}{r}.$$

Für  $R_5$ :

$$\varphi = \frac{1}{3c_5} \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ \frac{[\varrho]}{r^3} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right] \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Für  $R_7$ :

$$\varphi = \frac{1}{5c_7} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ \frac{[\varrho]}{r^5} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right] \frac{1}{r^4} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} \right] \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Hierin sind:

$$c_3 = 4\pi, \quad c_5 = \frac{8}{3} \pi^2, \quad c_7 = \frac{11}{15} \pi^3$$

die Oberflächen der Einheitskugel im  $R_3$ ,  $R_5$ ,  $R_7$  und die Symbole

$$[\varrho], \quad \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right], \quad \left[ \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} \right]$$

bedeuten, daß man die Werte zur Zeit  $t - \frac{r}{c}$  (die „retardierten“ Werte) nehmen muß. Man sieht: im Gegensatz zu  $R_3$  werden im  $R_5$  und  $R_7$  usw. die retardierten Potentiale nicht nur durch  $\varrho$ , sondern auch noch durch dessen Differentialquotienten nach der Zeit bestimmt. Dabei ist noch zu bemerken, daß für große Werte von  $r$ , also bei der eigentlichen Aus-

$p = 2n$  und  $p = 2n + 1$  die Zahl  $\pi$  in derselben Potenz  $n$ . Die analytische Beziehung zwischen beiden Tatsachen tritt in Evidenz, wenn man die Wellengleichung z. B. mit Hilfe von Fourierintegralen integriert. Man stößt dann schließlich auf ein Integral über die  $(p - 1)$ te Potenz von einem Quadratwurzelausdruck. Der Integrand wird also rational, wenn  $p = 2n + 1$ , irrational, wenn  $p = 2n$ . Das gleiche findet statt bei Berechnung des Kugelvolumens.

1) Vgl. a. a. O., Aanhangel IV, eine einfache Ableitung der Lösungen für die  $R_{2n+1}$ .

strahlung, es jeweils gerade auf den höchsten Differentialquotient von  $\varrho$  ankommt, weil er durch die kleinste Potenz von  $r$  dividiert ist. Ein „Elektron“ mit scharf begrenzter Ladung würde also im  $R_6, R_7 \dots$  durch seine Bewegung Felder mit hohen Singularitäten ausstrahlen!

*Schlußbemerkungen:* 1. Wir haben hier nur solche Beziehungen betrachtet, bei denen der  $R_3$  eine *singuläre* Stellung gegenüber den anderen  $R_n$  einnimmt. Darüber hinaus ist es natürlich oft sehr instruktiv, sich deutlich zu machen, wie an so vielen Punkten der Physik die Dreizahl der Dimensionen eingreift, ohne daß bei Übergang auf den  $R_n$  der  $R_3$  gerade singuläres Verhalten zeigt: z. B. sind die 4 im Strahlungsgesetz von Stefan Boltzmann und die 3 im Verschiebungsgesetz von W. Wien:  $\varrho = \nu^3 f(\nu/T)$  im  $R_n$  durch  $(n+1)$  und  $n$  zu ersetzen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen einatomiger Gase  $c_p/c_v = 1^{2/3}$  durch  $1 + 2/n$  usw.

2. Man wird so veranlaßt, bei jeder in der Physik auftretenden, von den Maßeinheiten unabhängigen universellen Konstanten *versuchsweise* nach einem Zusammenhang mit der Dreidimensionalität des Raumes zu fragen (oder der Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt). Man denke z. B. an die Rolle der Zahl 8 (und 10?) im periodischen System der chemischen Elemente [vgl. Borns „kubisches Atommodell“<sup>(1)</sup>]; den Exponenten 2 in der Formel von Balmer.

3. Aber es greift noch eine andere ganze Zahl in jeden Winkel der Physik ein: der Exponent „zwei“ des Theorems von Pythagoras. Oder anders ausgedrückt: die homogenen quadratische Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_h \sum_k g_{hk} dx_h dx_k$$

hat eine überherrschende Bedeutung gegenüber allen anderen homogenen Formen. — Läßt sich an diesem *zwei* nichts mehr fragen und begreifen?

Leiden, August 1919.

1) Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 20. S. 230. 1918.

(Eingegangen 31. August 1919.)

### 3. Das Verhalten Hertzscher Gitter; von R. Gans.

J. J. Thomson<sup>1)</sup> und H. Lamb<sup>2)</sup> haben sich mit der Theorie Hertzscher Gitter beschäftigt, und G. H. Thomson<sup>3)</sup> und Schaefer und Laugwitz<sup>4)</sup> konnten durch ihre Beobachtungen beweisen, daß die Thomsonsche Theorie im Widerspruch mit der Erfahrung ist, während die Lambsche befriedigend den Tatsachen gerecht wird.

Eine Annahme bei den mathematischen Berechnungen war die gewesen, daß die Leitfähigkeit der Gitterdrähte unendlich groß sei, was berechtigt ist, wenn die Drähte z. B. aus Kupfer sind und einen nicht zu kleinen Radius haben.

Um den Materialeinfluß zu erforschen, haben Schaefer und Laugwitz<sup>5)</sup> Gitter aus sehr feinen Drähten (von 0,0125 mm Durchmesser) konstruiert, deren Leitfähigkeit durch geeignete Auswahl des Materials innerhalb weiter Grenzen variierte, und haben das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit für Hertzsche Wellen gemessen, konnten aber ihre experimentellen Resultate nicht mit der Theorie vergleichen, weil es noch keine Theorie des Verhaltens Hertzscher Gitter von endlicher Leitfähigkeit gab.

Beim Studium verschiedener Methoden zur Messung der magnetischen Permeabilität ferromagnetischer Körper für sehr schnelle Schwingungen habe ich mich auch mit der Gittertheorie beschäftigt und gelegentlich das Reflektions- und Absorptionsvermögen sowie die Durchlässigkeit der von Schaefer und Laugwitz benutzten Gitter numerisch berechnet.

1) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. S. 425.

2) H. Lamb, Proceedings of the London Math. Soc. 29. S. 523. 1898.

3) G. H. Thomson, Straßburger Dissert. u. Ann. d. Phys. 22. S. 365. 1907.

4) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. 21. S. 587. 1906.

5) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. 23. S. 951. 1907.



Diese Ergebnisse sollen im Folgenden mitgeteilt werden.

Leider standen mir die Arbeiten von J. J. Thomson und von Lamb nicht zur Verfügung. Deshalb mußte ich die Lambschen Formeln, die sich auf Drähte von unendlicher Leitfähigkeit beziehen, und die die Grundlage unserer Überlegungen bilden werden, von neuem ableiten. Hierbei kam mir die Lambsche Theorie<sup>1)</sup> der Ausbreitung akustischer Wellen durch Gitter wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem elektromagnetischen Problem zustatten.

Nach Beendigung der vorliegenden Arbeit fand ich, daß Schaefer und Reiche<sup>2)</sup> sich auch mit Gittertheorie beschäftigt haben, aber sie beschränken sich auf den Fall, daß die Gitterkonstante groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, während für das Studium Hertzscher Wellen gerade der entgegengesetzte Fall von Interesse ist.

Außerdem behandelt von Ignatowsky<sup>3)</sup> die Theorie der Gitterbeugung, und zwar in sehr allgemeiner Weise. Deshalb sind seine Ableitungen naturgemäß wesentlich komplizierter als unsere, nach anderer Methode gefundenen.

Bei der Anwendung seiner Formeln auf *elektrische* Wellen (a. a. O., S. 480) begeht er das Versehen, die von uns in dieser Abhandlung eingeführte Größe

$$- \Delta = \frac{2a}{\lambda} \ln \frac{a}{2\pi b}$$

gegen Eins zu vernachlässigen, während er die unendlich kleine Größe

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda}$$

beibehält, so daß seine Gleichung (27) unrichtig wird, welche gerade für uns in Betracht kommt.

### § 1. Unendlich gut leitende Gitter.

**Erster Fall:** Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Eine ebene elektromagnetische Welle komme aus der Richtung  $x = +\infty$  und pflanze sich in der Richtung der negative  $x$  fort. In der  $yz$ -Ebene befinde sich ein Gitter von

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik; Deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907. S. 630.

2) Cl. Schaefer u. Fr. Reiche, Ann. d. Phys. **35**, S. 817. 1911.

3) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **44**, S. 369. 1914.



äquidistanten metallischen Drähten vom Radius  $b$ , deren Achsen die Richtung der  $z$ -Achse haben. Der Abstand zweier aufeinander folgender Drähte (Gitterkonstante) sei  $a$ .

Wir beschränken uns auf den Fall, daß der Radius  $b$  klein gegen den Abstand  $a$  sei und  $a$  wiederum klein im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$ .

Nach der elektromagnetischen Theorie gehorcht die  $z$ -Komponente des elektrischen Vektors, die einzige, welche existiert, wenn die elektrischen Schwingungen den Gitterdrähten parallel sind, der Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_z,$$

die sich in

$$(2) \quad \Delta U + k^2 U = 0$$

transformiert unter der Annahme, daß  $n$  die Schwingungszahl sei, so daß

$$(3) \quad E_z = U e^{2\pi i n t},$$

und wenn zur Abkürzung

$$(4) \quad k = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

gesetzt wird, unter  $c$  die Lichtgeschwindigkeit, unter  $\lambda$  die Wellenlänge verstanden.

Für  $x = +\infty$  muß  $U$  nach (1), (3) und (4) die Form haben

$$(5) \quad U = e^{ikx} + A e^{-ikx};$$

in dieser Gleichung stellt das erste Glied rechts die einfallende, das zweite die reflektierte Welle dar.

Für  $x = -\infty$  muß  $U$  der Gleichung

$$(6) \quad U = B e^{ikx}$$

gehören, welche die durch das Gitter gedrungene Welle repräsentiert.

Uns werden besonders das Reflektionsvermögen  $|A|^2$  und die Durchlässigkeit  $|B|^2$  interessieren.

Da die Leitfähigkeit der Drähte in diesem Paragraphen als unendlich angenommen wird, so kann die elektrische Schwingung nicht ins Metall eindringen; deshalb gilt aus Stetigkeitsgründen an der Oberfläche der Drähte

$$(7) \quad U = 0.$$

Wir können den Raum durch zwei dem Gitter parallele Ebenen in drei Teile zerlegen (vgl. die Figur), und zwar so, daß  $OL$  und  $OM$  groß gegen die Gitterkonstante  $a$  aber klein gegen die Wellenlänge  $\lambda$  sind.

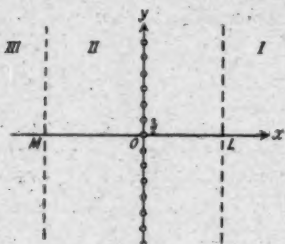


Fig. 1.

Dann gilt Gleichung (5) in I und hat in der Nähe der Trennungsebene der beiden Räume I und II den nähersten Wert

$$(8) \quad U = 1 + A + i k x (1 - A),$$

weil  $kx$  dort eine kleine Größe ist.

Im Räume III gilt (6), und in der Nähe der Trennungsebene der Räume II und III haben wir näherungsweise

$$(9) \quad U = B (1 + i k x).$$

Im Räume II lautet die Differentialgleichung für  $U$

$$\Delta U = 0,$$

da  $k$  sehr klein ist, und da aus Symmetriegründen  $U$  von  $z$  unabhängig ist, erhalten wir

$$(10) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Es handelt sich also darum, ein Integral dieser Gleichung zu suchen, welches auf den Oberflächen der Drähte der Bedingung (7) genügt, das für  $x = +\infty$  in (8), für  $x = -\infty$  in (9) übergeht.

Die Funktionen

$$(11) \quad \varphi_1 = x - \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}$$

und

$$(12) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \left( \cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right)$$

sind nach den Prinzipien der Funktionentheorie als reelle Teile von

$$x + yi - \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi(x + yi)}{a} \text{ bzw. } \log \sinh \frac{\pi(x + yi)}{a}$$

partikuläre Integrale von (10).

Für sehr kleine Werte von  $x$  und  $y$  nehmen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Werte an

$$(13) \quad \begin{cases} \varphi_1 = x \left( 1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right), \\ \varphi_2 = \log \frac{\pi}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

so daß auf der Oberfläche des Drahtes  $x^2 + y^2 = b^2$

$$(14) \quad \varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \log \frac{\pi b}{a},$$

und diese Werte gelten wegen der Periodizität der Funktionen bezüglich  $y$  auch auf den Oberflächen der übrigen Drähte.

Für  $x = +\infty$  gilt

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_1 = x - l, \\ \varphi_2 = \frac{\pi x}{a} - \log 2 \\ \text{und für } x = -\infty \\ \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = -\frac{\pi x}{a} - \log 2, \end{cases}$$

wenn

$$(16) \quad l = \pi \frac{b^2}{a}$$

bedeutet.

Wir wollen probieren, ob wir den Bedingungen (7), (8) und (9) durch den Ansatz

$$(17) \quad U = \alpha \varphi_1 + \beta + \gamma \varphi_2$$

genügen können, indem wir die Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zweckmäßig bestimmen.

Nach (7) und (14) erhalten wir

$$(18) \quad \beta + \gamma \log \frac{\pi b}{a} = 0,$$

so daß sich (17) in

$$(19) \quad U = \alpha \varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a}} \varphi_2$$

verwandelt.

Nach (19), (8) und (9) muß gelten

$$(20) \begin{cases} 1 + A + i k (1 - A) x = a(x - l) + \beta - \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{\pi x}{a} - \log 2 \right), \\ B + i k B x = a(x + l) + \beta + \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{\pi x}{a} + \log 2 \right). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind in Wirklichkeit vier, da sie für jeden Wert von  $x$  gelten müssen, und erlauben so, die vier Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $\beta$  zu berechnen.

Es ergibt sich

$$(21) \quad B - A = \frac{1 + i k l}{1 - i k l},$$

$$(22) \quad B + A = \frac{i A + 1}{i A - 1},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$(23) \quad A = -\frac{k a}{\pi} \log \frac{a}{2 \pi b}.$$

Unsere Annahme über die Größenordnung von  $b$ ,  $a$  und  $\lambda$  zeigen, daß

$$k l = \frac{2 \pi^2 b^2}{a \lambda}$$

eine unendlich kleine Zahl ist, so daß (21) sich in

$$(21') \quad B - A = 1$$

verwandelt, und aus (21') und (22) folgt

$$(24) \quad A = \frac{1}{i A - 1}; \quad B = \frac{i A}{i A - 1}.$$

Diese Konstanten geben die Amplituden und Phasen der reflektierten und durchgehenden Welle.

$$|A|^2 = \frac{1}{1 + A^2} \quad \text{und} \quad |B|^2 = \frac{A^2}{1 - A^2}$$

stellen das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit des Gitters dar. Ihre Summe ist gleich Eins wegen der vollkommenen Leitfähigkeit der Drähte, d. h. weil das Absorptionsvermögen gleich Null ist.

Diese Resultate sind mit denen von Lamb identisch, wie ich aus einem Zitat in der erwähnten Arbeit von G. H. Thomson entnehmen kann.

§ 2. Zweiter Fall: Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.

In diesem Falle ist der magnetische Vektor  $H$  parallel zur  $z$ -Achse und genügt der Differentialgleichung

$$(25) \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta H_z,$$

die sich in

$$(26) \quad \Delta V + k^2 V = 0$$

verwandelt, wenn man setzt

$$(27) \quad H_z = e^{2\pi i n t} V.$$

Führt man Zylinderkoordinaten  $r, \vartheta, z$  ein, deren Ursprung eine Drahtachse ist, so sind  $H_z$  und  $E_\vartheta$  nach den Maxwell'schen Gleichungen verknüpft durch die Beziehung

$$(28) \quad -\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t},$$

und da die Tangentialkomponente von  $E$  an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters verschwinden muß, so erhält man mit Rücksicht auf (27) auf den Drahtoberflächen

$$(29) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Das Problem ist genau identisch mit dem von Lamb<sup>1)</sup> behandelten akustischen Problem.

Die Funktion

$$(30) \quad \varphi_3 = x + \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}$$

genügt als reeller Teil von

$$x + y i + \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi(x + y i)}{a} \text{ der Gleichung } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

hat für kleine  $x$  und  $y$  den Wert

$$(31) \quad \varphi_3 = x \left( 1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right) = \cos \vartheta \left( r + \frac{b^2}{r} \right),$$

gibt also

$$(32) \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \cos \vartheta \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right),$$

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 630.

so daß

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0$$

auf den Drahtoberflächen.

Für

$$\begin{aligned} x = +\infty & \text{ ist } \varphi_3 = x + l, \\ x = -\infty & \text{ ist } \varphi_3 = x - l. \end{aligned}$$

Versuchsweise setzen wir an

$$(33) \quad V = \alpha' \varphi_3 + \beta',$$

und bestimmen die willkürlichen Konstanten  $\alpha'$  und  $\beta'$  durch die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen der Räume I und II bzw. II und III mittels der Gleichungen

$$(34) \quad \begin{cases} \alpha' (x + l) + \beta' = 1 + A' + ik(1 - A')x, \\ \alpha' (x - l) + \beta' = B' + ikB'x, \end{cases}$$

indem wir annehmen, daß

$$(35) \quad \begin{cases} \text{im Raume I:} & V = e^{ikx} + A' e^{-ikx}, \\ \text{und im Raume III:} & V = B' e^{ikx} \end{cases}$$

gilt.

Durch Elimination von  $\alpha'$  und  $\beta'$  erhält man

$$(36) \quad A' = \frac{ikl}{1 + ikl}; \quad B' = \frac{1}{1 + ikl},$$

oder

$$(37) \quad |A'|^2 = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}; \quad |B'|^2 = \frac{1}{1 + k^2 l^2}.$$

Das Reflektionsvermögen ist in diesem Falle fast Null wegen des äußerst kleinen Wertes von

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda},$$

während die Durchlässigkeit fast Eins ist, wie Hertz das bereits experimentell festgestellt hat.

### § 3. Gitter von endlicher Leitfähigkeit.

Erster Fall: Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Die Maxwellschen Gleichungen

$$(38) \quad \begin{cases} \text{rot } H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\sigma E, \\ -\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$



erlauben die Elimination des Vektors  $H$  und geben zur Bestimmung von

$$(39) \quad E_z = U e^{2\pi i n z}$$

die Gleichung

$$(40) \quad \Delta U + k^2 U = 0,$$

in der

$$(41) \quad k^2 = 4\pi^2 n^2 \varepsilon \mu - 8\pi^2 \mu \sigma n i$$

bedeutet, unter  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante, unter  $\mu$  die Permeabilität und unter  $\sigma$  die Leitfähigkeit verstanden. Alle diese Werte seien in elektromagnetischem Maße gemessen.

Für Luft geben wir allen Konstanten den Index 0 und haben somit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}; \quad \mu_0 = 1; \quad \sigma_0 = 0$$

und somit

$$(42) \quad k_0 = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

während im Metall der Gitterdrähte, in denen  $\varepsilon n$  neben  $\sigma$  zu vernachlässigen ist,

$$(43) \quad k = \sqrt{-8\pi^2 \mu \sigma n i}$$

gilt.

Da  $U$  von der Koordinate  $z$  unabhängig ist, können wir das Integral von (40) für das Drahtinnere in folgender Form schreiben

$$(44) \quad U = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} J_{\nu}(k r) \cos \nu \vartheta.$$

In dieser Gleichung bedeuten  $r, \vartheta$  Polarkoordinaten in einer zu der des Gitters senkrechten Ebene, deren Pol der Schnittpunkt der Drahtachse mit jener Ebene ist,  $J_{\nu}$  die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung  $\nu$ , während die  $C_{\nu}$  Konstanten sind.

Im Außenraum der Drähte, soweit derselbe zum Raume II gehört, wollen wir das Integral  $U$  als lineare Kombination der schon früher benutzten [vgl. (11), (12) und (30)] drei Funktionen

$$(45) \quad \begin{cases} \varphi_1 = x - \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \left( \cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \\ \varphi_3 = x + \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}, \end{cases}$$

darzustellen suchen, die für kleine  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  die Werte annehmen

$$(46) \quad \begin{cases} \varphi_1 = x \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) = \cos \vartheta \left( r - \frac{b^2}{r} \right), \\ \varphi_2 = \log \frac{\pi r}{a}, \\ \varphi_3 = x \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) = \cos \vartheta \left( r + \frac{b^2}{r} \right), \end{cases}$$

so daß für  $r = b$

$$(47) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 2 \cos \vartheta, \\ \varphi_2 = \log \frac{\pi b}{a}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{b}, \\ \varphi_3 = 2b \cos \vartheta, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0. \end{cases}$$

Ferner haben wir

$$(48) \quad \begin{cases} \text{für } x = +\infty \quad \varphi_1 = x - l, & \text{für } x = -\infty \quad \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = \frac{\pi x}{a} - \log 2, & \varphi_2 = -\frac{\pi x}{a} - \log 2, \\ \varphi_3 = x + l, & \varphi_3 = x - l. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen drücken die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $E$  und  $H$  beim Durchgang durch die Drahtoberfläche aus.

Bezeichnen wir den Wert von  $U$  im Drahtinnern mit  $U_i$ , im Außenraum mit  $U_a$ , so stellt sich die Stetigkeit von  $E$  [vgl. (39)] in der folgenden Weise dar.

Für  $r = b$ :

$$(49) \quad U_t = U_a.$$

Ferner gilt nach der zweiten Gleichung (38)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial H_\phi}{\partial t},$$

also ist die Stetigkeit von  $H$  gewährleistet durch die Beziehung

$$(50) \quad \text{für } r = b: \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial U_t}{\partial r} = \frac{\partial U_a}{\partial r}.$$

Gemäß unserer Annahme, daß  $U_a$  eine lineare Funktion von  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  ist, können wir schreiben

$$(51) \quad U_a = \alpha \varphi_1 + \beta + \gamma \varphi_2 + \delta \varphi_3$$

und erhalten mittels (47), (49), (44) und (51)

$$(52) \quad \beta + \gamma \log \frac{\pi b}{a} + \delta 2b \cos \vartheta = C_0 J_0(kb) + C_1 J_1(kb) \cos \vartheta$$

und mittels (47), (50), (44) und (51)

$$(53) \quad 2\alpha \cos \vartheta + \frac{\gamma}{b} = \frac{k C_0}{\mu} J_0'(kb) + \frac{k C_1}{\mu} J_1'(kb) \cos \vartheta;$$

denn aus der Form der Gleichungen (46), in denen nur  $\cos \vartheta$ , und nicht  $\cos 2\vartheta$ ,  $\cos 3\vartheta$  usw. vorkommen, erkennen wir, daß wir uns auf die ersten beiden Glieder der Reihe (44) beschränken können.

Da (52) und (53) für jeden beliebigen Wert von  $\vartheta$  gelten, so zerfallen dieselben in folgende vier Beziehungen.

$$(54) \quad \begin{cases} \beta + \gamma \log \frac{\pi b}{a} = C_0 J_0(kb), & 2b\delta = C_1 J_1(kb), \\ \gamma = \frac{kb}{\mu} C_0 J_0'(kb), & 2b\alpha = \frac{kb}{\mu} C_1 J_1'(kb). \end{cases}$$

Elimination von  $C_0$  und  $C_1$  ergibt

$$(55) \quad \frac{\beta + \gamma \log \frac{\pi b}{a}}{\gamma} = \frac{\mu}{kb} \frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\mu}{kb} \frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1,$$

wenn man die Abkürzungen einführt

$$(56) \quad \frac{\mu}{kb} \frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \quad \frac{\mu}{kb} \frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1.$$

Aus den Gleichungen (55) folgt

$$(57) \quad \gamma = -\frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \quad \delta = \alpha \tau_1,$$

so daß (51) in

$$(58) \quad U_a = \alpha \varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0} \varphi_2 + \alpha \tau_1 \varphi_3$$

übergeht.

Die Bedingungen im Unendlichen ergeben mit Berücksichtigung von (48), (58), (8) und (9)

$$(59) \quad \begin{cases} \alpha(x-l) + \beta - \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0} \left( \frac{\pi x}{a} - \log 2 \right) + \alpha \tau_1 (x+l) \\ \quad \quad \quad = 1 + A + i k_0 x (1 - A), \\ \alpha(x+l) + \beta + \frac{\beta}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0} \left( \frac{\pi x}{a} + \log 2 \right) + \alpha \tau_1 (x-l) \\ \quad \quad \quad = B + i k_0 x B. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen für jeden beliebigen Wert von  $x$  gelten, so zerfallen sie in die folgenden

$$(60) \quad \begin{cases} 1 + A = -\alpha l(1 - \tau_1) + \beta + \beta \frac{\log 2}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ i k_0 (1 - A) = \alpha(1 + \tau_1) - \frac{\beta \frac{\pi}{a}}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ B = \alpha l(1 - \tau_1) + \beta + \beta \frac{\log 2}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ i k_0 B = \alpha(1 + \tau_1) + \frac{\beta \frac{\pi}{a}}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}, \end{cases}$$

aus welchen

$$B - A - 1 = 2\alpha l(1 - \tau_1), \quad B + A + 1 = 2\beta \frac{\log \frac{2\pi b}{a} - \tau_0}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0},$$

und

$$i k_0 l(B - A + 1) = 2\alpha l(1 + \tau_1) \quad i k_0 (B + A - 1) = \frac{2\beta \frac{\pi}{a}}{\log \frac{\pi b}{a} - \tau_0}$$

d. h.

$$\frac{B-A-1}{B-A+1} = \frac{1-r_1}{1+r_1} i k_0 l \quad \text{und} \quad \frac{B+A+1}{B+A-1} = - \left( \log \frac{a}{2\pi b} + \tau_0 \right) \frac{a k_0}{\pi} i = \Delta i$$

folgt.

Bedenken wir, daß  $k_0 l$  äußerst klein ist, so haben wir

$$B - A = 1$$

und außerdem

$$B + A = \frac{\Delta i + 1}{\Delta i - 1},$$

so daß

$$(61) \quad A = \frac{1}{\Delta i - 1}; \quad B = \frac{\Delta i}{\Delta i - 1},$$

wird, unter  $\Delta$ 

$$(62) \quad \Delta = - \frac{2a}{\lambda} \left( \log \frac{a}{2\pi b} + \tau_0 \right)$$

verstanden.

Das Reflektionsvermögen  $|A|^2$  und die Durchlässigkeit  $|B|^2$  ergeben sich, wenn wir

$$(63) \quad \Delta = -u + v i$$

setzen, so daß

$$A = - \frac{1+v-u i}{u^2+(1+v)^2}; \quad B = \frac{v(v+1)+u^2+u i}{u^2+(1+v)^2},$$

also

$$(64) \quad |A|^2 = \frac{1}{u^2+(1+v)^2}; \quad |B|^2 = \frac{u^2+v^2}{u^2+(1+v)^2}$$

und das Absorptionsvermögen

$$(65) \quad 1 - |A|^2 - |B|^2 = \frac{2v}{u^2+(1+v)^2}$$

wird.

**Bestimmung der Funktion  $\tau_0$ .**

Wie man aus der Formel (62) ersieht, reduziert sich das Problem auf die Berechnung der Funktion  $\tau_0$ , welche durch die Gleichung (56) definiert ist.

Zur Diskussion der Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz interessiert uns nur der Fall  $\mu = 1$ , da sie nicht mit ferromagnetischen Materialien operiert haben.

Also wird

$$(66) \quad r_0 = \frac{1}{kb} \frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)},$$

wo  $kb$  nach (48) den Wert hat

$$(67) \quad kb = \sqrt{8\pi^2 \sigma n b^2} \sqrt{-i} = q \sqrt{-i}.$$

Nun ist die Funktion

$$(68) \quad \Omega = -\frac{q\sqrt{-i}}{2} \frac{J_0(q\sqrt{-i})}{J_0'(q\sqrt{-i})} = \Omega_1 + i\Omega_2$$

in seiner Abhängigkeit von  $q$  bekannt, denn  $\Omega$  stellt eine Kombination des Widerstandes  $r$  und der inneren Selbstinduktion  $L$  eines Drahtes für Wechselstrom dar. Es ist nämlich

$$\Omega = \frac{r}{r_0} + 2\pi n i \frac{L}{r},$$

worin  $r_0$  den Widerstand für Gleichstrom bedeutet.

Diese Funktion findet sich in verschiedenen Veröffentlichungen<sup>1)</sup> in Reihen entwickelt und in Tafeln niedergelegt, so daß wir uns ohne Weiteres der Beziehung

$$(69) \quad r_0 = -\frac{2i}{q^2} \Omega(q)$$

bedienen können.

#### § 4. Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.

Setzt man

$$(70) \quad H_z = e^{2\pi i n t} V,$$

so genügt die Funktion  $V$  der Gleichung

$$(71) \quad \Delta V + k^2 V = 0.$$

Um die Oberflächenbedingungen abzuleiten, schreiben wir eine der Maxwellschen Gleichungen an

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} + 4\pi \sigma E_\phi,$$

1) W. Thomson, Math. and phys. papers 3. S. 493. Cambridge 1890; I. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. 1903. S. 1141; vgl. auch I. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen. Stuttgart 1905. S. 403 u. 992; A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 8. S. 805. 1907; E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1909. S. 144—174.



aus der mit  $E_\phi = e^{2\pi i n t} W$

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = (\varepsilon 2\pi n i + 4\pi \sigma) W$$

hervorgeht.

Da aber  $\mu 2\pi n i (\varepsilon 2\pi n i + 4\pi \sigma) = -k^2$  ist, so folgt

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k^2}{\mu 2\pi n i} W.$$

Da  $V$  und  $W$  an der Oberfläche stetig bleiben müssen, so haben wir die Bedingungen

$$(72) \quad \begin{cases} V_i = V_a, \\ \frac{\mu}{k^2} \frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial V_a}{\partial r}. \end{cases}$$

Versuchsweise setzen wir an

$$(73) \quad V_a = \alpha' \varphi_3 + \beta' + \gamma' \varphi_1 + \delta' \varphi_2,$$

während

$$(74) \quad V = \sum_{v=0}^{\infty} C_v' J_v(kr) \cos v \vartheta.$$

Mittels (47), (73) und (74) erhalten wir die Gleichungen

$$(75) \quad \begin{cases} 2\alpha b \cos \vartheta + \beta + \delta \log \frac{\pi b}{a} = C_0' J_0(kb) + C_1' J_1'(kb) \cos \vartheta \\ 2\gamma \cos \vartheta + \frac{\delta}{b} = \frac{\mu k_0^2}{k} [C_0' J_0'(kb) + C_1' J_1'(kb) \cos \vartheta], \end{cases}$$

aus denen

$$(76) \quad \delta = \left( \beta + \delta \log \frac{\pi b}{a} \right) \varrho_0; \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \varrho_1$$

folgt, wenn wir die Abkürzungen einführen

$$(77) \quad \varrho_0 = \mu \frac{k_0^2 b^2}{k b} \frac{J_0'(kb)}{J_0(kb)}; \quad \varrho_1 = \mu \frac{k_0^2 b^2}{k b} \frac{J_1'(kb)}{J_1(kb)}.$$

So verwandelt sich (73) in

$$(78) \quad V_a = \alpha' \varphi_3 + \beta' + \alpha' \varrho_1 \varphi_1 + \frac{\beta' \varrho_0}{1 - \varrho_0 \log \frac{\pi b}{a}} \varphi_2.$$

Im Unendlichen gelten die Gleichungen (35), so daß mittels (48) die Beziehungen folgen

$$\begin{aligned} \alpha'(x+l) + \beta' + \alpha' \varrho_1(x-l) + \frac{\beta' \varrho_0}{1 - \varrho_0 \log \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{\pi x}{a} - \log 2 \right) \\ = 1 + A' + i k_0 (1 - A') x, \end{aligned}$$

$$\alpha'(x-l) + \beta' + \alpha' \rho_1(x+l) = \frac{\beta' \varrho_0}{1 - \varrho_0 \log \frac{\pi b}{a}} \left( \frac{\pi x}{a} + \log 2 \right) \\ = B' + i k_0 B' x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$\frac{1 + A' - B'}{1 - A' + B'} = \frac{1 - \varrho_1}{1 + \varphi_1} i k_0 l$$

oder genähert

$$(79) \quad B' - A' = 1$$

und

$$(80) \quad B' + A' = \frac{\frac{i k_0 a}{\pi} \left( 1 - \varrho_0 \log \frac{2\pi b}{a} \right) - \varrho_0}{\frac{i k_0 a}{\pi} \left( 1 - \varrho_0 \log \frac{2\pi b}{a} \right) + \varphi_0},$$

d. h.

$$(81) \quad \begin{cases} B' = \frac{\frac{i k_0 a}{\pi} \left( 1 - \varrho_0 \log \frac{2\pi b}{a} \right)}{\frac{i k_0 a}{\pi} \left( 1 - \varrho_0 \log \frac{2\pi b}{a} \right) + \varphi_0} = \frac{A' i}{A' i - 1}, \\ A' = - \frac{\varphi_0}{\frac{i k_0 a}{\pi} \left( 1 - \varrho_0 \log \frac{2\pi b}{a} \right) + \varphi_0} = \frac{1}{A' i - 1}, \end{cases}$$

wo

$$(82) \quad A' = - \frac{1}{\lambda_0} \left[ \log \frac{a}{2\pi b} + \frac{1}{\varrho_0} \right].$$

Nach (77) und (66) folgt mit  $\mu = 1$

$$(83) \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{k b}{k_0^2 b^2} \frac{J_0(k b)}{J_0'(k b)} = \frac{k^2 b^2}{k_0^2 b^2} r_0 = - \frac{2}{k_0^2 b^2} \Omega = - \frac{\lambda^2}{2\pi^2 b^2} \Omega.$$

### § 5. Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz.

Der durch (67) eingeführte Wert von  $q$  ist

$$(84) \quad q = \sqrt{8\pi^2 \sigma n b^2} = \sqrt{\frac{8\pi n}{\omega}}$$

unter  $\omega = \frac{1}{b^2 \pi \sigma}$  den in elektromagnetischen Einheiten gemessenen Widerstand von 1 cm Draht verstanden.

In den Versuchen von Schaefer und Laugwitz war  $\lambda_0 = 30$  cm;  $a = 1,5$  cm;  $b = 0,00125$  cm, so daß

$$\ln \frac{a}{2\pi b} = 5,252.$$

Um  $\tau_0$  zu bestimmen, berechnen wir die folgende Tabelle.

Material	$\omega \cdot 10^{-7}$	$q$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\tau_0$
Silber . . . . .	39	8,028	3,105	2,818	0,08744 - i 0,09636
Platin . . . . .	274	3,028	1,328	0,9632	0,2101 - i 0,2898
Manganin . . . . .	970	1,610	1,035	0,3181	0,2454 - i 0,7986
Kruppin . . . . .	1620	1,246	1,013	0,1927	0,2482 - i 1,305

$\Delta = -u + vi$	Reflektions- vermögen	Durchlässigkeit	Absorptions- vermögen
- 0,5339 + i 0,009636	76,65%	21,84%	1,51%
- 0,5462 + i 0,02898	73,69	22,05	4,26
- 0,5497 + i 0,07986	68,11	21,04	10,85
- 0,5500 + i 0,1305	63,20	20,18	16,62

Diese Werte sind nach den Gleichungen (64) und (65) berechnet worden, d. h. unter der Annahme, daß die elektrischen Schwingungen den Drähten parallel waren. Die Autoren machen darüber zwar keine Angaben, jedoch ist es auf Grund der Beobachtungsergebnisse außer Zweifel, daß Oszillator, Resonator und Gitterdrähte einander parallel waren.

Schaefer und Laugwitz geben die folgenden experimentellen Resultate

Material	Reflektions- vermögen	Durchlässigkeit	Absorptions- vermögen
Silber . . . . .	35,5%	62,1%	2,4%
Platin . . . . .	32,9	60,6	6,5
Manganin . . . . .	32,0	57,7	10,3
Kruppin . . . . .	25,3	55,8	18,9

welche keineswegs mit der Theorie übereinstimmen.

Die Abweichungen würden noch bedeutend größer sein, wenn wir annäheren, daß der Oszillator senkrecht zu den Drähten stand, denn in diesem Falle hätte  $1/\varrho_0$  nach (88) einen so großen Wert, daß die Gleichungen (81) praktisch mit

$B' = 1$ ;  $A' = 0$  identisch sind, d. h. in dieser Anordnung würde das Gitter nichts reflektieren und die Gesamtstrahlung hindurchlassen.

Es ist schwer, den Grund dieser Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung anzugeben, da die Verfasser keine Einzelheiten der Versuchsanordnung und Messung mitteilen, aber es könnte sein, daß zu den Differenzen die Dämpfung der ausgesandten Wellen beigetragen hat.

La Plata, 1. Dezember 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

---

#### 4. *Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen; von Richard Gans und Ricardo Calatroni.*

(Nach Versuchen von Ricardo Calatroni.)

Nachdem der eine von uns<sup>1)</sup> gezeigt hatte, daß die ultramikroskopischen Metallteilchen kolloidaler Gold- und Silberlösungen mit großer Annäherung Kugelform haben, wandten wir uns der Ermittlung der geometrischen Form der Partikeln in Platinlösungen zu, über deren Resultate im folgenden kurz berichtet werden soll.

Nach Abschluß unserer Untersuchungen kam uns — infolge des Krieges sehr verspätet — die schöne Publikation von Diesselhorst und Freundlich<sup>2)</sup> zu Händen, in der diese nach ihrer Schlierenmethode u. a. die Gansschen Resultate bestätigen und feststellen konnten, daß auch die nach der Bredigschen Zerstäubungsmethode hergestellten Platinsole aus kugeligen Amikronen bestehen.

Wenn wir trotzdem unsere Beobachtungen der Veröffentlichung übergeben, so geschieht es erstens, weil dieselben die Diesselhorst und Freundlichschen, nach ganz anderer experimenteller Methode angestellten Messungen bestätigen, zweitens, weil es uns daran lag, daß das zur Untersuchung herangezogene Material auf rein chemischen Wege durch Reduktion hergestellt sei; denn bei den hohen Temperaturen, die bei der Zerstäubungsmethode ins Spiel kommen, ist es nicht ausgeschlossen, daß das Metall kurze Zeit flüssig ist und dann den Kapillarkräften unterliegt, und da wir gerade einen Beitrag zur Kenntnis der physikalisch-chemischen Kräfte liefern wollten, die für die Form der äußerst kleinen Teilchen maßgebend sind, so mußten wir alle sekundären Einwirkungen ausschalten.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 881. 1912; 47. S. 270. 1915.

2) H. Diesselhorst u. H. Freundlich, Phys. Zeitschr. 17. S. 117. 1916.

Unsere ersten Versuche stellten wir allerdings mit Präparaten an, die wir nach der Bredigschen Methode gewonnen hatten, indem wir unter ganz reinem Wasser, welches als Schutzkolloid 0,1 Proz. Gelatine enthielt, zwischen zwei 0,6 mm dicken Platinelektroden einen Lichtbogen erzeugten. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *A* hatte eine dunkel graurote Farbe.

Dann gingen wir zum Paalschen Verfahren<sup>1)</sup> über, und zwar benutzten wir protalbinsaures Natrium als Schutzkolloid, indem wir von der Platinchlorwasserstoffsäure ausgingen, Hydrazinhydrat als Reduktionsmittel benutzten und dann gegen Wasser dialysierten. Das so entstehende sehr stabile Präparat löst sich, worauf Paal und Amberger hinwiesen, sehr leicht in warmem Wasser nach Zusatz eines Tropfens verdünnter Natronlauge. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *B* war grauschwarz.<sup>2)</sup>

Von diesen beiden Lösungen wurde, wie früher, die Absorption mit dem König-Martensschen Spektralphotometer gemessen, und zwar für die vier Heliumlinien  $\lambda = 6678, 5877, 5010, 4472 \text{ \AA.E.}$  Es ergaben sich folgende Tabellen, in denen wir die Absorption in relativem Maß angeben, indem wir dieselbe für die grüne Linie willkürlich gleich Eins setzen.

Tabelle 1.

Absorption der ursprünglichen Lösungen.

Lösung *A* nach Bredig.  
Farbe: dunkel graurot.

$\lambda$	<i>K</i>
667,8	0,687
587,7	0,822
501,0	1,000
447,2	1,230

Lösung *B* nach Paal.  
Farbe: grauschwarz.

$\lambda$	<i>K</i>
667,8	0,705
587,7	0,817
501,0	1,000
447,2	1,163

1) C. Paal u. C. Amberger, Chem. Ber. 37. I. S. 124. 1904.

2) Daß die beiden Lösungen *A* und *B* verschiedene Farbe haben, trotzdem der Verlauf der Absorptionskurven fast identisch ist, ist nichts Auffallendes, denn aus physiologischen Gründen hängt die Farbe auch von den absoluten Werten der Absorption ab. Davon überzeugt man sich z. B. leicht, wenn man dieselbe Kaliumbichromatlösung in dünner und dicker Schicht beobachtet. Im ersten Falle ist sie grün, im zweiten orange gefärbt.



Um aus diesen Lösungen die größeren Partikel und die, welche sich durch Zusammenballen von kleineren gebildet hatten, auszuschalten, wurden die ursprünglichen Lösungen nach dem von einem von uns<sup>1)</sup> beschriebenen modifizierten Bechhold'schen Verfahren ultrafiltriert, und zwar mit Kolloidumfiltern, die mehr oder weniger Eisessig enthielten.

Die mit den so präparierten Lösungen gewonnenen Absorptionskurven sind die folgenden.

Tabelle 2.

Mit 0,5 Proz. Eisessig-Kolloidumfiltern ultrafiltriert.  
Farbe mattgelb.

Lösung A nach Bredig.		Lösung B nach Paal.	
$\lambda$	K	$\lambda$	K
667,8	0,342	667,8	0,326
587,7	0,583	587,7	0,574
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,357	447,2	1,075

Tabelle 3.

Mit 1,0 Proz. Eisessig-Kolloidumfiltern ultrafiltriert.  
Farbe hellgelb.

Lösung A nach Bredig.		Lösung B nach Paal.	
$\lambda$	K	$\lambda$	K
667,8	0,516	667,8	0,459
587,7	0,704	587,7	0,693
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,237	447,2	1,195

Um aus diesen Resultaten Schlüsse über die Form der Teilchen ziehen zu können, haben wir die Absorptionskurven theoretisch berechnet, welche kugel-, scheiben- und stabförmigen Partikeln entsprechen.

Hierzu brauchten wir die numerischen Werte des Reflexionsvermögens und des Extinktionskoeffizienten des metallischen Platins, welche von Hagen und Rubens<sup>2)</sup> beobachtet worden sind.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 280. 1915.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. S. 1 u. 432. 1902.

Tabelle 4.

$\lambda$	$R$	$\nu x$	$m = \nu(1 - ix)$	$m'^2 - 1$	$\lambda'$
650	0,664	4,53	3,219 - i 4,53	- 6,733 - i 16,46	488,3
600	0,640	4,15	2,964 - i 4,15	- 5,744 - i 13,84	450,1
550	0,612	3,81	2,836 - i 3,81	- 4,631 - i 12,13	412,0
500	0,584	3,49	2,659 - i 3,49	- 3,862 - i 10,40	374,3
450	0,547	3,15	2,555 - i 3,15	- 2,893 - i 8,976	336,0
425	0,523	2,98	2,636 - i 2,98	- 2,073 - i 8,738	317,0

In Tab. 4 bedeutet  $\lambda$  die Wellenlänge im Vakuum,  $R$  das Reflektionsvermögen,  $\nu x$  den Extinktionskoeffizienten nach Hagen und Rubens. Daraus berechnet sich der (reelle) Brechungsindex  $\nu$  nach der Formel

$$(1) \quad \nu = \frac{1+R}{1-R} - \sqrt{\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 - (1 + \nu^2 x^2)}.$$

Die vierte Kolonne enthält  $m = \nu - i \nu x$ , den sogenannten komplexen Brechungsindex. Nennt man  $m_0$  den Brechungsindex des Wassers, so ist  $m' = m/m_0$  der komplexe Brechungsindex des Platins gegen Wasser. In Kolonne 5 finden sich die Werte von  $m'^2 - 1$ , und schließlich enthält Kolonne 6 die Wellenlängen in Wasser.

Die Absorption  $K$  ergibt sich ferner<sup>1)</sup> aus folgendem Formelsystem.

$$(2) \quad K = \frac{2\pi}{\lambda'} \operatorname{Im}(-a_1 - 2a_1'),$$

wo

$$(3) \quad a_1 = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1) \frac{3}{4\pi} P}; \quad a_1' = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1) \frac{3}{4\pi} P'}.$$

$P$  und  $P'$  sind Faktoren, welche nur von der Form der Teilchen abhängen, und zwar ist

für	$\frac{P}{4\pi}$	$\frac{P'}{4\pi}$
Kugeln . . . .	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Stäbchen . . . .	0	$\frac{1}{3}$
Scheiben . . . .	1	0

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 886. 1912. Formel (19) und (21).

$\lambda'$  und  $m'$  sind bereits oben definiert; „Im“ bedeutet den imaginären Teil des in Klammern stehenden Ausdrucks.

So berechnete sich die folgende Tabelle, in welcher  $K$  die Absorption einer 1 mm dicken Lösung bedeutet, in welcher sich 1 mm<sup>3</sup> Platin in 1 Liter Wasser befindet.  $K_{\text{red}}$  stellt dieselben Absorptionen für solche Konzentrationen dar, daß dieselben für  $\lambda = 500 \mu\mu$  gleich Eins werden.

Tabelle 5.

$\lambda$	$K$			$K_{\text{red}}$		
	Kugeln	Stäbchen	Scheiben	Kugeln	Stäbchen	Scheiben
650	0,00669	0,07249	0,1414	0,4634	1,162	1,209
600	0,00874	0,06691	0,1291	0,6050	1,073	1,104
550	0,01114	0,06485	0,1237	0,7713	1,040	1,058
500	0,01444	0,06237	0,1169	1,000	1,000	1,000
450	0,01875	0,06144	0,1126	1,298	0,985	0,963
425	0,02018	0,06378	0,1162	1,397	1,022	0,994

Die Figur gibt  $K_{\text{red}}$  in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge für Kugeln und Stäbchen. Die für Scheiben gültige

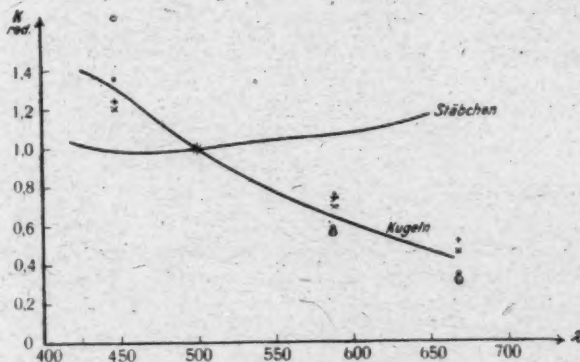


Fig. 1.

Kurve haben wir nicht gezeichnet, weil sie sich kaum von der für Stäbchen gültigen unterscheidet. Neben diesen theoretischen Werten der Kurve sind die beobachteten Absorptionen eingetragen, und zwar entsprechen

•	Lösung	A	nach	Bredig.	Ultrafilter	mit	0,5%	Eisessig
⊙	„	B	„	Paal.	„	„	0,5 %	„
+	„	A	„	Bredig.	„	„	1,0 %	„
×	„	B	„	Paal.	„	„	1,0%	„

Ein Vergleich mit der theoretischen Kurve ergibt, daß die Platinamikronen ebenso wie die Silber- und Goldamikronen genähert Kugelgestalt haben.

La Plata, 15. Juli 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

**5. Experimentelle und theoretische Untersuchungen  
über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel;  
von Reinhard Mecke.**

**I. Teil: Experimentelle Ergebnisse.**

(Marburger Dissertation 1919.)

**Inhaltsverzeichnis:**

Einleitung. § 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel. § 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße. — Versuchsanordnung. Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im homogenen Nebel. § 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht. § 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht. § 3. Messungen im monochromatischen Licht. § 4. Versuche mit homogenen Nebeln anderer Flüssigkeiten. § 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen. Zusammenfassung.

**Einleitung.**

**§ 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel.**

Im homogenen Nebel von gleichgroßen, durchsichtigen Tröpfchen, welche als Kugellinsen dem Brechungs- und Reflexionsgesetze unterliegen, sind drei verschiedene Arten von Beugungserscheinungen möglich, von denen die bekannteste wohl der Regenbogen ist. Dieser entsteht durch innere Reflexion im Tropfen und seine Theorie, welche auf der Beugung nichtsphärischer Wellen beruht, ist in Weiterbildung der Theorie von Cartesius von verschiedenen Forschern schon eingehend behandelt worden, so daß ich hier nur auf die diesbezüglichen Arbeiten von Airy<sup>1)</sup>, Pernter<sup>2)</sup> und Möbius<sup>3)</sup> verweisen möchte. Ein anderes nur im reflektierten Licht sichtbares Beugungsphänomen sind die in der Metereologie als Glorie, die das Brocken- oder Ballongespenst umgibt, allge-

1) G. Airy, Trans. of the Soc. of Cambr. 6. S. 379. 1836.

2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 495ff.

3) W. Moebius, Ann. d. Phys. 33. S. 79. 1910.

mein bekannten farbigen Ringe, welche sich um den auf die Nebelwand fallenden Schatten des Beobachters bilden. Eine einwandsfreie Erklärung der Glorie durch ein in der Einfallsrichtung sich bildendes Intensitätsmaximum gelang Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Richarz<sup>1)</sup>; jedoch liegen die Verhältnisse hier sehr verwickelt und manches bedarf noch der Aufklärung. Auf eine Anregung von Geheimrat Prof. Richarz hin fand ich z. B., daß mit aufgewirbeltem Lycopodiumstaub die Erscheinung selbst im intensiven Bogenlicht nicht hervorzurufen war, während sie beim künstlichen Nebel schon im schwachen diffusen Tageslicht sichtbar ist. Allerdings ist auch die Intensität des an den Tröpfchen zurückgeworfenen Lichtes weit größer als an Lycopodiumstaub. Es scheinen somit noch andere Ursachen, welche wohl auf der Eigenschaft der Tröpfchen als Kugellinsen beruhen mögen, zur Entstehung der *Glorie* beizutragen. Auch dürfte die bis jetzt stillschweigend gemachte Annahme, daß das *zurückgeworfene Licht* aus parallelen Strahlen besteht (denn nur für solches Licht gelten ja die Fraunhoferschen Beugungsgleichungen), bei der Erklärung der farbigen Beugungsringe (*Glorie*) kaum zutreffend sein. Die Erklärung des Intensitätsmaximums erfährt dadurch keine Änderung. Eine genaue Untersuchung der *Glorie* und ihre Theorie muß aber einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, da es sich als notwendig erwies, zunächst die einfacheren Erscheinungen im *durchgehenden Licht* zu untersuchen und zu erklären.

Diese sind in der Natur häufig als prächtig gefärbte Kränze, auch Aureolen oder kleine Höfe genannt, um Sonne und Mond zu sehen, wenn leichtes Gewölk oder Nebel diese Gestirne verschleiern. Schon Fraunhofer fand, daß dieses Phänomen mit der Beugungserscheinung kreisförmiger Scheibchen, wie sie sich durch eine mit Lycopodium- oder Bovistsporen bestreute Glasplatte nachahmen läßt, analog ist. Die Erscheinung besteht in der Mitte, zunächst der direkt gesehenen Lichtquelle aus einem bläulichweiß gefärbten zentralen Feld, umgeben von einem braunroten Kreis, an den sich ein dunkelvioletter Ring und dann abwechselnd grüne und rote Ringe anschließen. Im *monochromatischen Licht* setzt

1) F. Richarz, Marburger Sitzungsber. 1912. S. 1 u. 5; Metereol. Zeitschr. 25. S. 29. 1908; 29. S. 282. 1912; 31. S. 188. 1914.



sie sich aus dunklen und hellen Ringen mit abnehmender Helligkeit zusammen, welche die Lichtquelle konzentrisch umgeben. Bedeutet  $\varphi$  den Beugungswinkel,  $r$  den Tropfenradius und  $\lambda$  die Wellenlänge, so gehorchen die Ringe dem Gesetze

$$z_{\text{Min}} = \frac{r}{\lambda} \sin \varphi,$$

wo  $r$  den Tropfenradius bedeutet,  $z_{\text{Min}}$  aber eine Konstante ist und für den ersten dunklen Ring den Wert 0,61, für den zweiten den Wert 1,116 besitzt. Man kann also aus den Durchmesser der Minima verschiedener Ordnung die Tropfengröße bestimmen, und es muß sich *jedesmal* derselbe Wert ergeben. Im *weißen* Licht nimmt man für die Messungen am besten den äußersten Rand des roten Ringes, wo nach den Versuchen von Fraunhofer das Minimum der Wellenlänge „des weißen Lichtes“  $0,571 \mu^1$ ) liegt.

Von den 11 Messungen von Kämtz<sup>1)</sup> nun, welche ich in Pernters „*Metereologischer Optik*“ fand, zeigen die aus den beiden ersten Ringen berechneten Tropfenradien nur geringe Abweichungen von etwa  $\pm 3$  Proz. voneinander. Auf dem Ben Nevis<sup>2)</sup> gemachte Beobachtungen weisen allerdings etwas größere Abweichungen auf, doch ist dies wohl auf die Schwierigkeit der Messungen im weißen Licht und die Veränderlichkeit der Erscheinung zurückzuführen. Auch bestehen oft Zweifel, ob die Wolkenelemente wirklich aus Wassertropfen und nicht aus Eiskristallen bestehen. Nach diesen Messungen besitzt natürlicher Nebel noch immer relativ große Tropfen von etwa  $5\text{--}30 \mu$  Radius.

Während also bei der Naturerscheinung sowohl bezüglich der Farbenfolge als auch bezüglich der Durchmesser der Ringe gute Übereinstimmung mit der Theorie erzielt worden ist, treten beim künstlichen Nebel, der ungefähr 5—10 mal kleinere Tropfen besitzt, ganz andere Erscheinungen auf. Das zentrale Feld, welches nahezu weiß sein soll, ist lebhaft gefärbt und ähnelt in seiner Veränderlichkeit mit der Tropfengröße den Farben dünner Blättchen. Nach Kießling<sup>3)</sup> durchläuft es in schneller Aufeinanderfolge folgende Farben, die immer

1) J. Pernter, *Metereol. Optik*, S. 459.

2) J. Pernter, *Metereol. Optik*, S. 466, 467.

3) J. Kießling, *Deutsche Metereol. Zeitschr.* 1. S. 122ff. 1884.  
Dämmerungserscheinungen, Hamburg 1888, S. 140.

blasser werden: blaßlila, blaulila, leuchtend hellblau, bläulich grün, smaragdgrün, gelbgrün, hellorange, dunkelorange, scharlachrot, carmoisinrot, steingrau, olivengrün, gelbgrün, bronzegelb, orange usw.

Die Farbenfolge im Beugungsbilde, welche eine gänzlich andere ist, scheint nicht so einfachen Gesetzmäßigkeiten unterworfen zu sein, und die wenigen im monochromatischen Lichte vorhandenen Beobachtungen lassen auch hier Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen vermuten.

Es ist deshalb der Zweck dieser Arbeit, die Erscheinungen und Abweichungen eingehend zu untersuchen und zu erklären. Da für die Erscheinungen im *weißen* Licht schon gute Beschreibungen von Kießling, Barus u. a. vorhanden sind, so legte ich besonderen Wert auf die Messungen im *monochromatischen* Licht und vergleichende Beobachtungen mit der gleichzeitigen Färbung des zentralen Feldes, um hier etwaige Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Zu diesem Zwecke wurden auch Messungen mit anderen Flüssigkeiten ausgeführt. Daran anschließend soll in einem zweiten Teil zur Erklärung dieser Erscheinungen die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen abgeleitet werden, woraus sich dann eine Methode der Berechnung von Tropfenradien aus der Färbung des zentralen Feldes ergeben wird.

## § 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße.

Nebel besteht nach den Untersuchungen von Kießling<sup>1)</sup>, Roth<sup>2)</sup> u. a., welche die von Clausius<sup>3)</sup> aufgestellte Bläschentheorie widerlegten, aus massiven kugelförmigen Tröpfchen, die sich durch plötzliche Abkühlung an den zur Nebelbildung notwendigen Kondensationskernen niedergeschlagen haben. Als solche Ansatzkerne können z. B. Staubeilchen und Ionen, wie sie sich in Flammgasen befinden, dienen. Eine Kondensation von Flüssigkeit läßt sich experimentell am einfachsten durch adiabatische Zustandsänderung der den gesättigten Dampf enthaltenden Luft erreichen. Da bei Wasser und den

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 117. 1884.

2) Fr. Roth, Deutsche Metereol. Zeitschr. 2. S. 52. 1885.

3) R. Clausius, Lichterscheinungen der Atmosphäre. 1850. S. 392—346; Pogg. Ann. 76. S. 84—88.

meisten anderen in Betracht kommenden Flüssigkeiten (außer Äther) die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes negativ ist, so tritt Kondensation nur bei plötzlicher *Abkühlung* der mit Wasserdampf gesättigten Luft ein.

Für die folgenden Versuche war es nun von Wichtigkeit, durch *andere nicht auf Beugung* beruhende Meßverfahren eine Vorstellung von der in Frage kommenden Tropfengröße im homogenen Nebel zu erhalten. Von den verschiedenen Methoden kann die direkte mikroskopische Ausmessung der Teilchen außer Betracht gelassen werden. Barus<sup>1)</sup> fand nämlich nach Überwindung der großen experimentellen Schwierigkeiten, daß die Tropfengröße durchaus nicht homogen ist. Es ist dies wohl auf die nachträgliche Veränderung des Durchmessers auf dem Objektträger zurückzuführen. Zu erwähnen wäre dann die Bestimmung aus der Fallgeschwindigkeit, deren Genauigkeit aber auch durch äußere Einflüsse und große Fehlerquellen erheblich beeinträchtigt wird. Ferner ist eine Berechnung des Tropfenradius möglich, wenn man die kondensierte Wassermenge und die Anzahl der Tropfen bzw. der Ansatzkerne kennt. Auf dieser letzteren Methode beruhen die zahlreichen Messungen von Barus<sup>2)</sup>, indem er die relative Abnahme der Kondensationskerne infolge mehrerer aufeinanderfolgender Expansionen durch Versuche berechnet. Während diese Messungen die relative Tropfengröße mit einiger Wahrscheinlichkeit zu ermitteln gestatten, beruht ihre absolute Bestimmung nur auf Schätzung. Man kennt eben die anfängliche Anzahl der Kerne nicht genau genug und der Vorgang der Expansion verläuft nicht streng adiabatisch, so daß die Temperaturerniedrigung nur angenähert bekannt ist. Diesen beiden Methoden käme, wenn man von der Schwierigkeit solcher Messungen absieht, infolgedessen nur Beachtung zu, sobald es sich um die bloße Bestimmung der Größenordnung handelt. Ihre Genauigkeit reicht jedoch nicht an die durch die optische Methode erzielbare, welche eine schnelle absolute Bestimmung gestatten würde, heran. Aus diesem Grunde schon

1) C. Barus, Amer. Journ. of Sc. 17. S. 81ff. 1904.

2) Vgl. z. B. Ann. d. Phys. Boltzmann-Festschrift. S. 204ff. 1904; Sill. Journ. 18. S. 81. 1902; 24. S. 309—312. 1907; 31. S. 564—566. 1911; 15. S. 335. 1903.

erhebt sich die Forderung, die Erscheinungen und Gesetze der Beugung im Wassernebel eingehend zu untersuchen.

Die Größenordnung der im künstlichen Nebel zu erwartenden Tropfen läßt sich angenähert am besten wohl aus der kondensierten Wassermenge und der Anzahl der Kondensationskerne berechnen. Die durch Kondensation niedergeschlagene Wassermenge läßt sich aus den thermischen Daten nach bekannten Formeln<sup>1)</sup> bestimmen. In einem Gefäß mit konstantem Volumen sei von der Menge  $M$  eines Stoffes,  $m_0$  im dampfförmigen, also  $M - m_0$  im flüssigen Zustand vorhanden. Bedeuten  $T_0$  und  $T$  die Anfangs- und Endtemperaturen (abs.),  $r_0$  und  $r$  die Verdampfungswärmen bei den betreffenden Temperaturen,  $c$  die spezifische Wärme der Flüssigkeit, so ist bei der Endtemperatur im dampfförmigen Zustand die Menge

$$m = \frac{T}{r} \left( \frac{m_0 r_0}{T_0} - M \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_0} \right).$$

Soll im Anfang alle Flüssigkeit verdampft sein, so ist  $m_0 = M$  zu setzen. Die Temperaturänderung läßt sich aus der adiabatischen Zustandsgleichung

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p - \pi}{p_0 - \pi_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

berechnen, wobei  $\pi$  der Sättigungsdruck des Dampfes bedeutet. Den Richtungssinn des Vorganges kann man aus dem ersten Differentialquotienten nach der Temperatur ersehen, welcher sich zu

$$dm = -m \cdot \frac{h}{r} dT$$

ergibt. Ist also die spezifische Wärme  $h$  des gesättigten Dampfes negativ, so wird es auch  $dm$  bei einer Expansion und es tritt dann Kondensation ein, während bei positiver spezifischer Wärme das Umgekehrte der Fall sein würde. Die Berechnung von  $m$  bedarf aber noch einer kleinen Korrektur, da die durch die Kondensation freiwerdende Verdampfungswärme nicht nur den Dampf, sondern auch die umgebende Luft miterwärmt. Die Versuche wurden nun bei Zimmertemperatur von etwa

1) G. Kirchhoff, Wärme, 1894. S. 88ff.; Helmholtz, Wärme, 1903. S. 236ff.; Clausius, Mechanische Wärmetheorie 1. S. 161ff.; Winkelmann, Handbuch d. Phys. 3. (Wärme) S. 644ff.

17° und einer durchschnittlichen Druckverminderung von 20 cm *Hg* ausgeführt. Zwar wurden auch größere Druckunterschiede, welche eine erhebliche Abkühlung unter den Nullpunkt bedeuten würden, angewandt, doch dürfte dann der Vorgang infolge der äußeren Wärmeleitung kaum adiabatisch verlaufen. Barus fand z. B., daß schon nach einer Minute wieder nahezu Temperatenausgleich stattgefunden hat. Einer Druckverminderung von 74 cm auf 54 cm würde eine Temperaturänderung von 290° abs. auf 265° ( $k = 1,40$ ) also 25° entsprechen; die Verdampfungswärme des Wassers ist  $r = 596,7 - 0,601 t^0$ , d. h.  $r_0 = 586,5$  und  $r = 601,5$ . Aus diesen Daten ergibt sich  $m = 0,929 m_0$  und es hat sich somit 0,071  $m_0$  Wasser kondensiert. Da im Kubikzentimeter Luft bei 17° maximal  $14,5 \cdot 10^{-6}$  g Wasserdampf enthalten sind, so wurden also für 1 g Luft  $872 \cdot 10^{-6}$  g Wasser niedergeschlagen. Die hierdurch freiwerdende Wärmemenge von 0,51 kal. erwärmen die Luft ( $c_p = 0,237$ ) um 2,15° und setzen die Temperaturerniedrigung auf 22,85° gegen 25° herab. Folglich erhält man nur 0,064 m, d. h.  $0,93 \cdot 10^{-6}$  g pro ccm Luft.<sup>1)</sup>

Neben der kondensierten Wassermenge hängt die Tropfengröße auch noch von der Anzahl der vorhandenen Ansatzkerne ab. Soll der Nebel aber Beugungserscheinungen zeigen, so muß er homogen sein, da bei verschiedenen Tropfenradien die von den einzelnen Tropfen erzeugten Beugungsbilder sich übereinanderlagern und die Ringe an Schärfe und Reinheit der Farben verlieren würden. Es kommt also im wesentlichen darauf an, daß die Teilchen von gleicher Beschaffenheit und vor allen Dingen gleichmäßig verteilt sind, denn nur dann können die Kerne den Wasserdampf aus gleichgroßen Bereichen an sich reißen.<sup>2)</sup> Bei einer beträchtlichen Anzahl der Kerne wird aber die Verteilung nie eine so regelmäßige sein, um bei dem kleinen Tropfenradius die zur Erzeugung von guten Beugungsbildern erforderlichen Ansprüchen an die Homogenität genügend zu erfüllen. Sind hingegen wenig Kondensationskerne vorhanden, so wird wiederum die Erscheinung zu lichtschwach, um praktische Beobachtungen anstellen zu können. Zur Erzielung brauchbarer Beugungsbilder ist es

1) Für die Berechn. vgl. auch C. Barus, Ann. d. Phys. 24. S. 229. 1907.

2) E. Barkow, Marburger Dissert. Entstehung von Nebel. S. 13.



also notwendig, daß die Luft nach einer Bezeichnung von Kießling<sup>1)</sup> „den lichtgünstigsten Dunstbetrag“ enthält. Dieser beträgt nun nach den Versuchen<sup>2)</sup> von Barus in der oberen Grenze etwa  $5 \cdot 10^4$  Kerne im Kubikzentimeter und sinkt bis auf etwa  $5 \cdot 10^2$ . Ist  $N$  die Anzahl der Kondensationskerne im Kubikzentimeter,  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit,  $m$  die niedergeschlagene Wassermenge, so berechnet sich der Radius  $r$  leicht aus der Formel

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot s \cdot N.$$

Für Wasser unter den üblichen Versuchsbedingungen würden Tropfen von etwa  $1,7$ – $7,7 \mu$  Radius entstehen. Da eine Druckerniedrigung von ungefähr  $2 \text{ cm}$  gerade noch Nebelbildung hervorzurufen vermag, so schwanken beim künstlichen Nebel die Tropfengrößen zwischen  $0,9$  und höchstens  $8 \mu$ . Für andere Flüssigkeiten als Wasser wird man unter denselben Versuchsbedingungen im allgemeinen andere Größen erhalten und zwar hängen sie, wie die Berechnung zeigt, außer vom Dampfgehalt der Luft noch von der spezifischen Wärme des gesättigten Dampfes und seiner Verdampfungswärme ab.

Die Messungen aus der Fallgeschwindigkeit ergeben nach Versuchen von Barkow<sup>3)</sup> Tropfen von derselben Größenordnung.

#### Versuchsanordnung.

Zur experimentellen Herstellung von möglichst homogenem Nebel durch die Entspannungsmethode verwandte ich folgende Versuchsanordnung, wie sie auch schon von Kießling<sup>4)</sup>, Barkow<sup>5)</sup>, Mierdel<sup>6)</sup> u. a. benutzt wurde, und die eine weitgehende Regulierung der Tropfengröße innerhalb der angegebenen Grenzen zuläßt.

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. **1**, S. 117–126. 1884. Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1888.

2) C. Barus, Boltzmann-Festschrift, S. 205. 1904; Ann. d. Phys. **24**, S. 225–242. 1907.

3) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel. S. 61. 1906.

4) J. Kießling, Metereol. Zeitschr. **1**, S. 117ff. 1884.

5) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel, S. 15ff. 1906.

6) F. Mierdel, Marb. Dissert. w. veröff. in „Physik der freien Atmosphäre“.



In einem Vorvakuum, bestehend aus den beiden großen Flaschen  $V_1$  und  $V_2$  (Säureballone) und der Glaskugel  $V_3$  von 40 cm Durchmesser, wurde durch eine kräftige Wasserstrahlpumpe  $L$  ein Reservoir von verdünnter Luft hergestellt. Der Unterdruck konnte an einem Quecksilbermanometer  $M$  abgelesen werden. Um einen bestimmten Verdünnungsgrad erzielen zu können, war das Gefäß  $V_3$  von den beiden anderen durch den Hahn  $H_3$  noch abzuschließen. Ein kleiner Erlenmeyerkolben  $E$  fing nach Abstellung der Pumpe das zurück fließende Wasser auf; ein weiterer Hahn  $H_4$  verhinderte dann

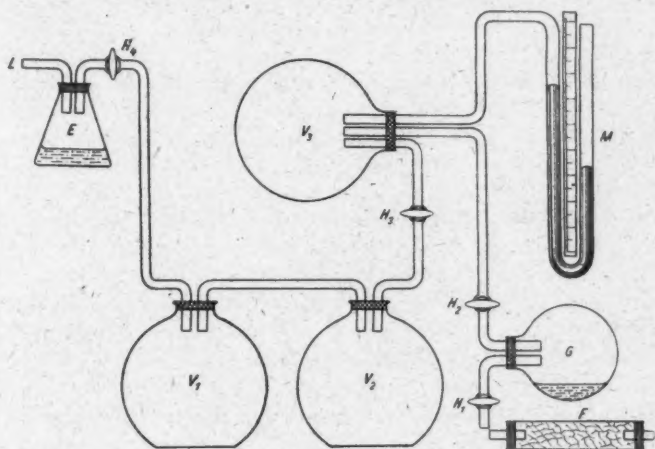


Fig. 1.

das Einströmen von Außenluft in das Vorvakuum. Die Verbindungen wurden durch weite Glasröhren und dickwandige Gummischläuche hergestellt, welche an den Ansatzstellen noch zweckmäßig durch festangezogene Drahringe und Lacküberzüge gegen Undichtigkeiten geschützt waren.

Das eigentliche Nebelgefäß  $G$  bestand aus einer Glaskugel von 20 cm Durchmesser, welche etwas Wasser enthielt, um die Luft dauernd mit Wasserdampf gesättigt zu erhalten, und war mit einem doppelt durchbohrten Gummistopfen verschlossen. Dieser besaß zwei mit Hähnen versehene Glasröhren, von denen die eine mit dem Vakuumreservoir, die

andere aber mit der Außenluft in Verbindung stand. Nach Schließen des Hahnes  $H_1$  konnte durch Öffnen von  $H_2$  die gewünschte Entspannung bewirkt werden; durch Öffnen von  $H_1$  wurde der Unterdruck wieder ausgeglichen. Das Vorvakuum hatte den Zweck, auch nach mehreren Entspannungen einen nahezu konstanten Unterdruck von 30–40 cm zu erhalten.

Kondensationskerne wurden durch Einsaugen von Flammgasen, welche sehr kräftig auf die Nebelbildung wirken, in das Gefäß  $G$  gebracht; meistens enthielt aber die Zimmerluft schon genügend Kerne, um gute Beugungsbilder zu liefern. Trat hingegen bei den ersten Entspannungen zu dichter Nebel auf, so mußte durch mehrere kräftige Entspannungen ein Teil der Kerne entfernt werden. Zweckmäßig wurde dabei die einströmende Luft durch kernfreie ersetzt, was dadurch ermöglicht wurde, daß die eintretende Luft erst durch ein Filter, bestehend aus einer 30 cm langen, dicht mit Watte gefüllten Glasröhre gesaugt wurde. Dabei konnte die Mehrzahl der im Nebelgefäß vorhandenen Kondensationskerne entfernt werden und man erhielt dadurch einen dünnen Nebel, bestehend aus großen Tropfen, welche allerdings bei ihrer Größe sehr schnell zu Boden sanken. Die Beobachtung war bei diesem dünnen Nebel sehr erschwert. Durch geeignete Druckverminderung, hervorgerufen durch längeres oder kürzeres Öffnen des Hahnes  $H_2$ , gelingt es nach einiger Übung bei dieser Versuchsanordnung leicht, jede Tropfengröße und jede beliebige Färbung des zentralen Feldes herzustellen.

Da die Beugungserscheinungen, die besonders bei weniger dichtem Nebel und im monochromatischen Lichte sehr schwer erkennbar sind, ein Experimentieren im vollkommen dunklen Zimmer notwendig machten, wurde folgende Meßanordnung gewählt:

Die Lichtquelle war von vorne durch einen aus schwarzer Pappe bestehenden, lichtundurchlässigen Schirm abgeblendet. In diesem war zur Erzielung einer scharfbegrenzten Lichtquelle eine kreisrunde Öffnung geschnitten, welche je nach der erforderlichen Lichtstärke einen Durchmesser von 2 oder 10 cm hatte. Der Maßstab wurde nun, von der Mitte der Öffnung ausgehend, in den Pappschirm eingestochen und von hinten durch eine Glühlampe beleuchtet. Für die zur Messung hinreichende Genauigkeit genügte die einfache Zentimeterteilung;

die halben Dezimeter wurden durch 2 Stiche, die ganzen Dezimeter durch 3 Stiche kenntlich gemacht. Auf diese Weise erhielt ich einen im gänzlich dunklen Zimmer gut sichtbaren Maßstab, welcher recht genaue Messungen zuließ.

Als Lichtquelle benutzte ich das durch eine Mattscheibe diffus gemachte, weiße Licht einer Bogenlampe, welche mittels einfachen Vorschaltens eines Filters, bestehend aus einer hinreichend konzentrierten Lösung von Kaliumpermanganat und Kaliumbichromat, nach Bedarf monochromatisch gemacht werden konnte. Dieses Filter ließ nur rotes Licht bis zur Wellenlänge von  $0,57\mu$  hindurch und besaß somit eine mittlere Wellenlänge von  $0,65\mu$ . Nach Aufstellen des planparallelen Gefäßes auf ein leichtbewegliches Tischchen war ein schnelles Ein- und Ausschalten des Filters vom Beobachtungsorte aus möglich, und die Versuche konnten im weißen und roten Lichte unmittelbar hintereinander ausgeführt werden. Es war dies für vergleichende Beobachtungen sehr wünschenswert. Zur Erzielung von streng monochromatischem Licht nahm ich einen breitbrennenden Bunsenbrenner, dessen Flamme durch geschmolzenes Kochsalz, das auf einer Asbestplatte in die Flamme gehalten wurde, intensiv gefärbt war. Mittels eines Hohlspiegels und einer großen Sammellinse konnte das Licht noch mehr auf die Blende konzentriert werden. Obwohl so eine recht helle Natriumbeleuchtung erzielt wurde, mußte doch zur Sichtbarmachung der Ringe die größere Öffnung von 10 cm Durchmesser genommen werden, was bei dem starken Bogenlicht hingegen nicht erforderlich war.

Für die Messungen wandte ich fast ausschließlich die subjektive Beobachtungsmethode an, welche mit der objektiven im Prinzip übereinstimmt, aber bei der großen Unbeständigkeit des Nebels schnellere und sicherere Beobachtung zuläßt. Das Nebelgefäß war im Durchschnitt 130—150 cm vom Schirm entfernt, und das Auge befand sich unmittelbar dahinter. Indem es durch den Nebel zur Lichtquelle blickte, wurden so die Beugungsringe auf einen dunklen Hintergrund projiziert. Die geringe Entfernung des Nebelgefäßes von der Lichtquelle war bei der Kleinheit der Tropfen vollkommen hinreichend, um die für die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen geforderte Parallelität der Strahlen zu gewährleisten. Andererseits ist ein größerer Abstand nicht zweckdienlich, um die

Meßgenauigkeit, welche schätzungsweise 3 Proz. betrug, nicht durch zu große Beugungsringe herabzusetzen.

**Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im  
homogenen Nebel.**

**§ 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht.**

Vor Ausführung der eigentlichen Messungen untersuchte ich den etwaigen Einfluß der Dicke der beugenden Schicht auf die Größe der Ringe und ihre Färbung. Indem ich bis zu 8 Glasplatten, auf beiden Seiten mit Lycopodiumpulver bestreut, dicht hintereinander aufstellte und durch sie die Beugungsringe um eine entfernte Lichtquelle beobachtete, fand ich nur in soweit eine Änderung der Erscheinung gegenüber einer Platte, als bei zu dichter Bestäubung die Ringe undeutlicher und verwaschener wurden. Es kommt dies wohl dadurch, daß dann zuviel Teilchen die Erscheinung verdecken. Ich möchte hierbei auch folgenden Versuch erwähnen: Stellt man zwei mit Lycopodiumsporen bestäubte Glasplatten soweit voneinander auf, daß die durch die eine Schicht hervorgerufenen Ringe bedeutend kleiner, etwa halb so groß, erscheinen als die anderen (ungefähr in 1 und 2 m Entfernung von der Lichtquelle), so lagern sich nicht, wie man erwarten sollte, beide Ringsysteme übereinander. Je nach der Stärke der Bestäubung sieht man entweder die größeren oder die kleineren Ringe; nur bei einem bestimmten Bestäubungsverhältnis gelang es mir, beide Beugungserscheinungen zur gleichen Zeit als einfache Übereinanderlagerung zu beobachten.

Auch bei Ausführung der obigen Versuche mit Bovistsporen (*Poletus cervinus*) oder mit in Wasser aufgeschwemmtem Lycopodiumpulver konnte ich eine Größenänderung der Ringe oder einen Farbenwechsel nicht feststellen. Der letztere Versuch mit Lycopodium, welches durch kräftiges Schütteln in Wasser fein verteilt wurde, dürfte wohl, abgesehen von der Größe der Teilchen, den beim homogenen Nebel tatsächlich vorliegenden Verhältnissen am nächsten kommen. In der Literatur fand ich außerdem von Barus<sup>1)</sup> eine experimentelle Untersuchung, wonach die im homogenen Nebel zu beobachtenden Erscheinungen bei einer Dicke der Nebelschicht von

1) C. Barus, Sill. Journ. (4) 31. S. 564—566. 1911.

15 cm bis zu ihrer dreifachen (45 cm) genau dieselben bleiben. Ein erheblicher Einfluß der Tiefenausdehnung dürfte somit nicht vorhanden sein, wie auch aus folgender Überlegung zu schließen ist: Das Nebelgefäß  $G$  befindet sich in der Entfernung  $l$  von der Lichtquelle  $L$  (Fig. 1a). Das von ihr auf die in der Blickrichtung  $CEFA$  sich befindenden Tröpfchen fallende Licht wird, damit es ins Auge des Beobachters bei  $A$  gelangt, um Winkel zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abgelenkt. Das Auge projiziert dann alle diese Strahlen auf dieselbe Stelle  $C$  des Schirmes. Die Maximaldifferenz der verschiedenen Beugungswinkel,  $\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2$ , ist nun gering und beträgt bei den in der Beschreibung der Versuchsanordnung gegebenen Abmessungen im Höchstfalle nur  $1\frac{1}{2}$  Proz. Außerdem kommen für die Beugung

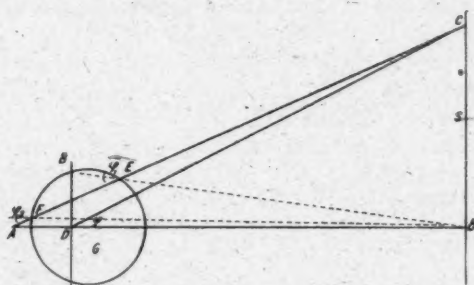


Fig. 1a.

hauptsächlich die in der Nähe des Auges sich befindenden Tropfen in Betracht, da diese die an weiter entfernt liegenden Tröpfchen gebeugten Strahlen verdecken; für ungebeugtes Licht fällt dies bei seiner erheblich größeren Helligkeit nicht so ins Gewicht. Um also einen mittleren Beugungswinkel zu erhalten, kann man annehmen, daß die Teilchen alle in einer Ebene  $BD$  sich befinden, die aber wohl nicht durch den Mittelpunkt des Nebelgefäßes  $G$  geht, sondern eher näher dem Auge zu liegt. Der mittlere Beugungswinkel ist dann mit großer Annäherung gleich dem Winkel  $CDL$  und für diesen gilt die Beziehung

$$\sin \varphi = \frac{s}{\sqrt{s^2 + l^2}} \sim \frac{s}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{s^2}{l^2}\right).$$



## § 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht.

Die Farbenerscheinungen, die das Beugungsbild in weißen Licht zeigt, sind schon von einigen Autoren näher beschrieben worden. Kiebling<sup>1)</sup> stellt fest, daß die Farben den Charakter von Mischfarben haben, welche aber mit einem eigentümlichen mattglänzenden Metallschimmer übergossen sind, so daß eine genaue Beschreibung der Farben schwierig ist. Er vermutet aus der rein qualitativen Beobachtung der Erscheinung eine Abhängigkeit der Färbung des zentralen Feldes von der Tropfengröße, indem es mit wachsendem Tropfenradius die in der Einleitung auf S. 474 erwähnten Farbtöne durchläuft. Für die Aufeinanderfolge der Farben in den Ringen gibt er keine genaueren Angaben, sondern stellt nur fest, daß hierin keine Gesetzmäßigkeit zu bestehen scheint. Barus<sup>2)</sup> erwähnt in seinen Untersuchungen über die Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne die Farbenfolge für einige Tropfengrößen. Außerdem findet er aber, daß bei dichtem Nebel auch die Lichtquelle selbst gefärbt erscheint (axial colours) und zwar merkwürdiger Weise nahezu komplementär zu der Färbung des sie umgebenden zentralen Feldes.

Um ein klares Bild über diese Beugungserscheinung im homogenen Nebel zu erhalten, besonders um für jede Tropfengröße das ihr charakteristische Farbenbild festzulegen, versuchte ich die Farbenfolge in den Ringen bei verschieden gefärbten zentralen Feldern möglichst genau zu bestimmen. Mit wachsender Tropfengröße (d. h. mit zunehmender Expansion) durchläuft die Färbung des *zentralen* Feldes drei Perioden, indem in jeder Periode die Farbe von violett über blau, grün, gelb, rot und purpurn nach violett zurückwechselt. Die erste Periode zeigt große, schön satt gefärbte zentrale Felder, welche infolge der Größe der Ringe nicht allzu lichtstark sind. Auch sind dadurch wenig andere Farben zu sehen. In den folgenden Tabellen ist die erste Farbe stets die des zentralen Feldes, worauf dann die anderen auffallendsten Farben von innen nach außen sich anschließen.

1) J. Kiebling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 117 ff. 1884.

2) C. Barus, Sill. Journ. 13. Boltzmann - Festschrift 1904. S. 207 ff.



Tabelle 1.  
Erste Periode.

Nr.	$r^1)$	Zentrales Feld	Ringe
1	1,0 $\mu$	hellviolett	grün
2	1,06	blauviolett	gelbgrün
3	1,2	hellblau	grün, rosa
4	1,27	blau (grünlich)	dunkelblau, rot
5	1,32	grünblau	hellviolett (rötlich)
6	1,4	grün	violettblau, hellgrün, rosa
7	1,45	gelbgrün	blau, rosa
8	1,52	gelb	grün, violett
9	1,57	orange	grün, violett
10	1,60	rot	grün, violett
11	1,63	rot	hellgrün (gelblich), rosa
12	1,66	purpurrot	fahlgrün, rosa
13	1,75	hellpurpur	grün, rötlich, violett

Hierauf folgt nun unmittelbar die zweite Periode, welche kleinere zentrale Felder besitzt und daher auch mehr Farben in den Ringen erkennen läßt. Die Intensität ist eine bedeutend größere, und gerade diese Periode zeigt die prächtigsten und glänzendsten Farbenscheinungen.

Tabelle 2.  
Zweite Periode.

Nr.	$r^1)$	Zentrales Feld	Ringe
1	1,87 $\mu$	violett	grün, rot, grün
2	1,92	violett	gelb, rot, dunkelblau
3	2,0	graublau	grün, dunkelviolet, gelb
4	2,07	blaugrün	gelb, violett, grün
5	2,09	bläulich grün	gelb, grün, rosa
6	2,15	smaragdgrün	(reines grün), dunkelblau, rot
7	2,22	olivengrün	schmales dunkelblau, rot
8	2,3	grüngelb	blau, grün, rot, violett
9	2,31	grünlich gelb	rot, blau, grün
10	2,32	gelb	rot, grün, violett
11	2,33	gelb	dunkler Streifen (schwach blau, grün, rot, blau), rot
12	2,35	hellorange	rot, grün, violett
13	2,4	hellpurpur	gelbgrün, rosa

1) Die Berechnung dieser Werte für die Tropfenradien folgt aus dem zweiten Teil.

Die dritte Periode ist in der Hauptsache nur eine Wiederholung der zweiten. Die Farben folgen hier sehr dicht aufeinander, so daß es oft schwierig ist, die einzelnen Farbtöne zu unterscheiden. Das zentrale Feld wird immer blasser gefärbt, und schließlich geht die ganze Beugungserscheinung allmählich in die normale Farbenfolge wie sie *Lycopodium*sporen zeigen, über. Sie ist deshalb weniger charakteristisch, und es seien nur einige Farbtöne mitgeteilt.

Tabelle 3.  
Dritte Periode.

Zentrales Feld	Ringe
weißgrün weißgelb weißorange	blau, rot blau, grün, rot grün, violett

Um die Tabellen später nicht wiederholen zu müssen, habe ich hier gleich die entsprechenden Tropfenradien hinzugefügt, wie sie sich aus der Färbung des zentralen Feldes nach der im zweiten Abschnitt entwickelten Theorie ergeben. Ich kann deshalb erst am Schlusse der Arbeit näher darauf eingehen. Gefärbte Beugungsbilder, welche noch kleineren Tropfen als  $1\mu$  Radius entsprachen, konnten aus dem in der Einleitung (S. 477) erwähnten Grunde nicht erhalten werden, da bei zu großer Dichte nur ein weißlicher inhomogener Nebel entstand.

Wie nun aus den Tabellen hervorgeht, ist es nicht möglich, irgendeine Gesetzmäßigkeit in der Farbenfolge der Beugungsringe zu entdecken. Nur das zentrale Feld durchläuft Farben, die in ihrer Aufeinanderfolge denen dünner Blättchen sehr ähneln. Bei seinem Entstehen erweckt das Beugungsbild durch das Kleinerwerden der Ringe den Anschein, als ob die inneren Farben in die Lichtquelle hineinversinken und von außen immer neue hinzutreten, welche sich über die bereits vorhandenen Farben (aber durchaus nicht gleichmäßig) zu schieben scheinen. Indem hierbei einige sich zu breiten Ringen ausbilden, andere hingegen so schmal werden, daß nur ein Übergangston sie anzudeuten scheint, entstehen so die mannigfaltigsten Farbenanordnungen, welche jeder Tropfengröße ein ihr allein eigentümliches Beugungsbild geben. Die Schnellig-

keit, mit der dieser Farbenwechsel erfolgt, ist eine sehr unregelmäßige. Im allgemeinen sind die Beugungserscheinungen der ersten Periode recht unbeständig und wechseln schnell ihre Farben, da infolge der Kleinheit der Tropfen ihr Radius größeren Veränderungen unterworfen ist. Doch auch für die verschiedenen gefärbten zentralen Felder vollzieht sich der Übergang von einem Farbton in den anderen nicht immer gleichmäßig. So ist z. B. die blaue Farbe des zentralen Feldes äußerst schwer zu erhalten, weil das Violett fast unmittelbar in ein bläuliches oder sogar reines Grün übergeht. Nur durch langsames Expandieren gelang es mir, die tiefblaue Färbung vorübergehend zu erhalten. Sehr charakteristisch und auffallend ist hingegen das schön smaragdgrün gefärbte zentrale Feld (Tab 2, Nr. 6), welches einen Durchmesser von etwa  $16^\circ$  hat. Hieran schließt sich mit scharfer Grenze ein schmaler dunkelblauer Ring von  $3^\circ$  Breite an, gefolgt von einem breiteren roten. Beständig, doch nicht so hervortretend, ist auch das purpurne zentrale Feld.

Da unsere übliche Farbenbenennung recht unvollkommen und auch subjektiver Natur ist, was leicht ein gewisses *Farbensuchen* des Beobachters zur Folge haben kann, so bemühte ich mich, die Farben noch genauer zu definieren, leider mit nicht nennenswertem Erfolge. Die Beugungsbilder, welche ja aus Mischfarben bestehen, enthalten immer noch soviel Weiß und allmähliche Übergänge in ihren Farbkomponenten, daß sie kräftige Absorptionsbanden im Spektrum nicht zu geben vermögen. Ich bemerkte deswegen in einem kleinen geradsichtigen Spektroskop auch nur beim Entstehen der Ringe schwache Schatten, welche schnell vom violetten zum roten Ende über das ganze Spektrum hinwegeilten und die ich ohne diese Bewegung nicht gesehen hätte. Ferner versuchte ich einen Vergleich der Farben mit denen des Ostwaldschen Farbenatlases durchzuführen. Es sind diese jedoch Oberflächenfarben, welche von der Stärke der Beleuchtung abhängen, so daß eine gute Betrachtung derselben im dunklen Zimmer gegen die helle Lichtquelle sehr erschwert ist. Auch war ich mit dem groß angelegten Werke, welches etwa 3500 verschiedene Farbtöne enthält, nicht so vertraut, um in der kurzen Zeit (1–2 Minuten), während welcher das Beugungsbild sichtbar blieb, gleich die richtige Farbe herauszufinden. Nach

längeren Versuchen konnte ich für das Beugungsbild Nr. 6. Tab. 2, welches noch am leichtesten und längstens herstellbar war, etwa folgende Vergleichsfarben feststellen:

grün: 88 *ga*, blau: 50 *ka*, rot: 90 *hb*.

Wir haben es in der Hauptsache mit den sogenannten hellklaren Farben zu tun, doch muß ich wegen der Bedeutung dieser Ostwaldschen Farbenbenennung<sup>1)</sup> auf das dem Atlas beiliegende Heft verweisen.

Ein Ausmessen der Ringe, etwa unter Benutzung des äußeren Randes eines roten Ringes, hielt ich hier, wo die Farbenanordnung eine so überaus verschiedenartige ist, für zwecklos und verschob es auf die Untersuchungen im monochromatischen Licht. Denn nur für die normale Farbenfolge ist die Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes<sup>2)</sup> zulässig, die ja nichts weiter besagt, als daß in diesem Falle das Minimum der Wellenlänge  $0,571 \mu$  bei der scharfen Grenze zwischen rot und violett liegt. Hier haben wir es aber anscheinend mit einer ganz anderen Beugungserscheinung zu tun. Ist jedoch im homogenen Nebel die Farbenfolge bei größeren Tropfen in die normale übergegangen, so findet man in der Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten und zweiten Ringe auch hier Übereinstimmung (vgl. hierzu § 4 und besonders die Messungen mit Alkoholnebel).

Eine Färbung der Lichtquelle, wie sie Barus als axial colours wahrgenommen hatte, konnte ich nur selten beobachten, da bei dem kleinen Nebelgefäß der Nebel meistens nicht dicht genug war. Verschärft wurde der Farbenkontrast, wenn ich die Beugungserscheinung auf der Mattscheibe eines kleinen photographischen Apparates beobachtete. Auf diese Weise fand ich folgende Färbungen:

Zentrales Feld:	violett	grün	gelbgrün	gelb
Lichtquelle:	gelbgrün	rötlich	rotviolett	grünblau
		orange		

Eine genaue Farbbestimmung war jedoch sehr schwierig, da die Färbungen äußerst schwach und die Helligkeit der Lichtquelle oft nur ihren Farbton vermuten ließ. Doch scheint aus diesen Beobachtungen und denen von Barus hervorzu-

1) Vgl. auch die Farbenfibel von Ostwald.

2) J. Pernter, *Metercol. Optik*, S. 459.

gehen, daß die Färbungen häufig, wenn auch *nicht immer* genau, komplementär zueinander sind.

### § 3. Messungen im monochromatischen Licht.

Die eben beschriebenen anomalen Farbenercheinungen lassen schon voraussehen, daß auch im monochromatischen Licht, welches aus der Gesamtwirkung aller Wellenlängen den Einfluß einer einzelnen allein erkennen läßt, erhebliche Abweichungen von der Beugungserscheinung undurchsichtiger, kreisförmiger Scheibchen auftreten werden. Es liegen hier jedoch noch wenige Beobachtungen vor, und die vorhandenen Messungen beschränken sich fast nur auf die Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten dunklen Ringe unter Benutzung der Beugungsgleichung undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen. Die Frage aber, ob diese Formel überhaupt für die Beugungserscheinungen im homogenen Nebel angewendet werden darf, wird nicht näher untersucht. Und gerade diese Frage scheint, wenigstens für kleine Tropfen, durchaus verneint werden zu müssen. Schon Barus<sup>1)</sup> fand beim Vergleich der optisch nach der obigen Formel berechneten Tropfenradien mit denen aus der Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne gewonnenen (vgl. Einleitung S. 475) Abweichungen, die er zuerst auf subjektive Beobachtungsfehler und Unbeständigkeit der Ringe infolge Verdampfens der Tröpfchen zurückführt. Später kommt er durch die Regelmäßigkeit dieser Abweichungen zu der Ansicht, daß ihre Bedeutung, solange eine Theorie der Erscheinungen noch nicht besteht, schleierhaft bleibt. Seine im grünen Quecksilberlicht ausgeführten Messungen<sup>2)</sup> des Durchmessers vom ersten Ringe und dessen Breite bringen nicht viel positiv Neues, was zur Klärung beitragen könnte. Mierdel<sup>3)</sup> berechnet den Tropfenradius zwar aus den beiden ersten Minima, bemerkt aber dazu, daß „natürlich nur die Ringe ausgemessen werden konnten, deren Minima erster und zweiter Ordnung annähernd gleichstark ausgeprägt waren“. Demzufolge bringt er nur zwei Messungen bei größeren Tropfen und findet bei dieser Auswahl dann allerdings Übereinstimmung in den Resultaten.

1) C. Barus, Sill. Journ. 24. S. 309—312, 410—425. 1907.

2) C. Barus, Sill. Journ. 27. S. 73. 1909.

3) F. Mierdel, Marb. Dissert.

Die Beugungstheorie undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen verlangt nun, daß die Durchmesser der Ringe stets in einem bestimmten konstanten Verhältnisse zueinander bleiben müssen und daß auch keine Änderung der Intensitätsverteilung eintreten darf. Da die Lage des ersten dunklen Ringes durch

$$\sin \varphi_1 = 0,61 \cdot \frac{\lambda}{r},$$

die des zweiten durch

$$\sin \varphi_2 = 1,116 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

gegeben ist, so müssen sich also die Radien immer wie 1 : 1,88 verhalten. Barkow<sup>1)</sup> fand nun beim homogenen Licht der Natriumflamme nicht diese gleichmäßige Helligkeitsverteilung, sondern beobachtete oft eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima, von denen er vier verschiedene Typen unterscheidet. Auch aus meinen Versuchen ergibt sich durchaus nicht ein regelmäßiges Abwechseln der Maxima und Minima oder gar ein konstantes Verhältniß der Ringe zueinander. Ich möchte die Änderungen, welche das Beugungsbild mit zunehmender Expansion und Tropfengröße erfuhr, wie folgt beschreiben:

Zuerst war bei den kleinsten Tropfen nur ein schwacher, großer, dunkler Ring zu bemerken, welcher allmählich kleiner wurde. Während nun der Radius des bald sichtbar werdenden zweiten Ringes schnell abnahm, verlangsamte sich die Geschwindigkeit des ersten immer mehr und kam schließlich gänzlich zum Stillstande. Die Ringe verbreiterten sich etwas und der erste schien sogar wieder größer werden zu wollen. Das dazwischen liegende Maximum, welches zuerst breit und hell war, schrumpfte zusammen und verlor zusehends an Intensität, bis es schließlich ganz verschwunden war und die beiden Minima sich zu einem einzigen breiten Ringe verschmolzen hatten. Diese Vereinigung dauerte jedoch nur kurze Zeit. Jetzt war es der erste Ring, welcher sich lostrennte und rasch kleiner wurde, während hingegen der zweite konstant blieb und sich auch mit dem dritten zu vereinigen schien. Zu gewissen Augenblicken waren drei schmale Minima und gut ausgeprägte Maxima zu sehen, so daß das Beugungsbild ganz den nor-

1) Barkow, Marb. Dissert. S. 77.



malen Eindruck machte. Dieser Vorgang des Treffens und wieder Auseinandergehens der Ringe wiederholte sich nun noch einmal, und das Beugungsbild ging dann allmählich mit kleineren Schwankungen in das normale über. Von jetzt ab ändern sich die Ringe nur noch im konstanten Verhältnisse zueinander.

Auch hinsichtlich der Breite und Helligkeit sind die Ringe Änderungen unterworfen, indem oft ein Schmälerwerden und erhebliche Aufhellung der Minima zu bemerken ist. Bei Messungen im Natriumlicht konnte ich sogar ein gänzlich Verschwinden des ersten Ringes beobachten. Da ich aber bei diesen Beobachtungen die große Öffnung von 10 cm Durchmesser nehmen mußte, um das Beugungsbild überhaupt sichtbar zu machen, so kann dies auch darin seine Erklärung finden, daß bei der großen Ausdehnung der Lichtquelle die schwachen Intensitätsunterschiede nicht mehr wahrzunehmen waren.

Dieser ganze Vorgang, welchen das Beugungsbild mit wachsender Tropfengröße durchläuft, ist also ein so auffallend eigenartiger und weist so große Abweichungen in den Ringen auf, daß man erst gar nicht wagt, daraus den Tropfenradius nach der alten Formel zu berechnen. Ich habe deswegen auch in der folgenden Tabelle nur die Beugungswinkel der Minima und das jeweilige Verhältnis der Ringe zueinander angegeben. Es wurden stets die beiden Ränder, der äußere und innere, gemessen und jedesmal das arithmetische Mittel daraus genommen. Hiervon mußte dann noch die Ausdehnung (Radius) der Lichtquelle (1 cm) abgezogen werden, um den richtigen Beugungswinkel zu erhalten. Die in Tabellen 4 und 5 enthaltenen Werte verstehen sich für rotes Licht und sind Mittelwerte aus 3 bis 8 Einzelmessungen. Die gleichzeitige Färbung des zentralen Feldes wurde nach der auf S. 481 angegebenen Methode der Einschließung vor und nach der Messung im roten Licht bestimmt.

Bei Verwendung von Natriumlicht wurden dieselben Werte erhalten, doch sind hier die Messungen durch die notwendig große Ausdehnung der Lichtquelle weniger zuverlässig. Auch hier fand ich z. B. durch die Vereinigung der beiden Ringe zwischen  $8^{\circ} 25'$  und  $17^{\circ} 15'$  ein breites Minimum. Es erübrigt sich deshalb, die Werte hierfür noch einmal zu wiederholen.

Tabelle 4.

Nr.	$\varphi_1$	$\varphi_2$	Bemerkungen	$\sin \varphi_1 : \sin \varphi_2$
1	11° 55'	Von 18° 25'	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld rot (Tab. 1, Nr. 10).	
2	11° 30'	Von 21° 30'	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld purpurrot (Tab. 1, Nr. 12).	
3	8° 50'	19° 40'	z. F. bläulich grün (Tab. 2, Nr. 5), breites 2. Maximum.	1: 2,3
4	8° 55'	19°	grün (Tab. 2, Nr. 6).	1: 2,19
5	8° 57'	18° 15'	grüngelb (Tab. 2, Nr. 8) 1. Ring etwas größer.	1: 2,09
6	9° 12'	16° 46'	gelb, grünlich (Tab. 2, Nr. 9—10) 2. Maximum nur schwach.	1: 1,86
7	Von 8° 25'	bis 17° 15'	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt, gelb (Tab. 2, Nr. 11) (22° 20' dritter Ring)	
8	8° 47'	17°	2. Ring etwas größer geworden	1: 1,97
9	7° 56'	17° 16'		1: 2,23
10	7° 15'	16° 45'		1: 2,37
11	6° 34'	15° 20'	gelb, dritte Periode (Tab. 3)	1: 2,38
12	6° 20'	14° 15'	orange, dritte Periode (Tab. 3)	1: 2,22
13	6° 15'	13° 10'		1: 2,14
14	6° 22'	12° 31'	20° 40' dritter Ring sichtbar	1: 2,0 : 3,39
15	6° 30'	11° 48'	18° 40' drittes Minimum	1: 1,84 : 2,97
16	Von 6° 22'	bis 12° 57'	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt	
17	6° 26'	10° 43'	17° 50' dritter Ring 2. Maximum nur schwach.	1: 1,67 : 2,9

Während nun bei den vorigen Messungen die Tropfen-  
größen nach der alten Formel, d. h. der Beugungsformel kreis-  
förmiger, undurchsichtiger Scheibchen, nicht berechnet werden  
konnten, glaubte ich dies jedoch tun zu dürfen, sobald das  
Beugungsbild den normalen Charakter angenommen hat, und  
die Ringe sich nur noch im gleichen Abstände voneinander  
ändern. Wie aus der Tabelle hervorgeht, erhielt ich für diesen  
Fall auch fast genaue Übereinstimmung der aus verschiedenen  
Ringem berechneten Tropfenradien mit nur geringen Abwei-  
chungen.

Um jene komplizierten Verhältnisse, wie sie besonders bei  
kleineren Tropfen auftreten, noch klarer zum Ausdruck zu  
bringen, als das durch die Beschreibung und die Tabellen  
möglich ist, versuchte ich, die Messungen graphisch darzustellen.  
Da mir aber jede andere Bezugsgröße, wie z. B. die Tropfen-

größe selbst, fehlt, wählte ich als Abszissenachse die Radien des ersten Ringes und als Ordinatenachse die des zweiten.

Tabelle 5.

$\varphi_1$	$r_1$	$\varphi_2$	$r_2$	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
4° 35'	4,97 $\mu$	8°	5,15 $\mu$	- 4,2%
3° 51'	5,88	7° 5'	5,90	- 0,3%
3° 39'	6,22	6° 38'	6,25	- 0,5
3° 8'	7,25	5° 55'	7,02	+ 3,2
2° 43'	8,32	5° 5'	8,17	+ 1,8

Der normale Verlauf des Beugungsbildes wäre dann durch eine gerade Linie gegeben, deren tang des Neigungswinkels 1,83 betrüge. In Fig. 2 erkennt man deutlich die Periodizität der Abweichungen, wenn auch die genaue Kurve noch durch mehrere Messungen festgelegt werden müßte. Bei den Spitzen A und B der Kurve vereinigen sich die beiden Ringe zu dem breiten Minimum und hier tritt dann auch mit wachsender Tropfengröße eine kleine Vergrößerung, zuerst des ersten Ringes und später nach ihrer Trennung des zweiten auf. Werden die Tropfen größer, so nähert sich die Kurve allmählich der Geraden, um von einem Tropfenradius von etwa 4—5  $\mu$  ab fast gar keine erheblichen Abweichungen mehr zu zeigen.

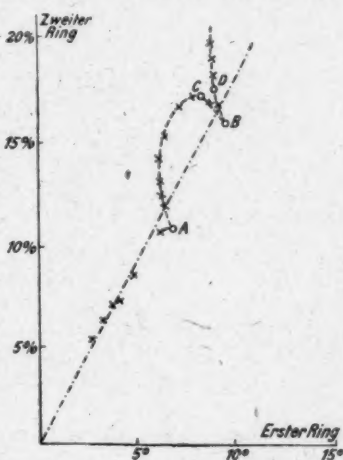


Fig. 2.

#### § 4. Versuche mit homogenem Nebel anderer Flüssigkeiten.

Um die bei Wasser durch seine thermischen Daten gegebenen Grenzen der Tropfengröße zu erweitern, besonders aber, um die stark vermutete Abhängigkeit der Beugungserscheinungen vom Brechungsexponenten nachzuweisen, stellte

ich noch Versuche mit anderen Flüssigkeiten an. Als gut geeignet hierzu erwiesen sich folgende chemische Verbindungen, deren Brechungsexponenten genau bestimmt waren und zwischen 1,333 (Wasser) und 1,586 (Anilin) lagen: Alkohol, Äther, Chloroform, Benzol, Toluol, Anilin. Vor Ausführung der Versuche wurde jedesmal das Nebelgefäß gut ausgetrocknet, und durch mehrere hintereinander gemachte Expansionen überzeugte ich mich auch davon, daß jegliche Nebelbildung verschwunden war. Durch kräftiges Schütteln und längeres Stehenlassen wurde nun die im Gefäß befindliche Luft mit dem betreffenden Dampfe gesättigt. Es trat dann fast stets sofort kräftige Nebelbildung ein, so daß Kondensationskerne aus Flammgasen nicht erst zugeführt zu werden brauchten, was infolge der leichten Explosionsmöglichkeit einiger Substanzen (Äther, Benzol) nicht zu empfehlen war. Versuchs- und Meßanordnung blieben dieselben.

a) Alkohol,  $C_2H_5OH$ ,  $n = 1,363$ .

Absoluter Alkohol besitzt einen Brechungsexponenten von 1,36, welcher nahezu gleich dem von Wasser ist. Spielt also die Durchsichtigkeit der Tropfen in der Entstehung der anomalen Beugungserscheinungen eine Rolle, so kann hier kein großer Unterschied bestehen. In der Tat erhielt ich mit Alkoholnebel auch dieselben eigenartigen Erscheinungen wie bei Wasser, indem er gefärbte zentrale Felder zeigt und auch sonst dem Wassernebel äußerst ähnlich ist. Nur können im allgemeinen nicht so kleine Tropfen hergestellt werden; demzufolge treten normale Beugungsbilder mit ungefärbten zentralen Feldern häufiger auf und sind dadurch der Beobachtung leichter zugänglich. In der Tab. 6 gebe ich einige Messungen dieser Ringe wieder, welche ich diesmal aber im weißen Licht unter Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes  $0,571 \mu$  ausgeführt habe.

Tabelle 6 (Alkohol).

$\varphi_1$	$r_1$	$\varphi_2$	$r_2$	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
$5^\circ 13'$	$3,83 \mu$	$9^\circ 27'$	$3,88 \mu$	$- 1,3\%$
$4^\circ 46'$	$4,19$	$8^\circ 47'$	$4,17$	$+ 0,5$
$4^\circ 5'$	$4,87$	$7^\circ 35'$	$4,83$	$+ 0,8$
$3^\circ 39'$	$5,47$	$6^\circ 48'$	$5,37$	$+ 1,8$

Danach scheinen die Abweichungen erst bei etwas kleineren Tropfen wie im Wassernebel, wo sie bei etwa  $4,5-5\mu$  beginnen dürften, aufzutreten, was eine eventuelle Abhängigkeit vom Brechungsexponenten andeuten könnte.

b) Äther,  $(C_2H_5)_2O$ ,  $n = 1,354$ .

Obwohl Äther eine positive spezifische Wärme seines gesättigten Dampfes besitzt, tritt doch bei Expansion Nebelbildung ein, wenn der Ätherdampf mit viel Luft gemischt ist, eine eigenartige Erscheinung, die auch R. v. Helmholtz<sup>1)</sup> beobachtet hat. Dagegen bildet er einen nicht durch Kondensation, sondern nur als Schlieren sichtbaren Dampfstrahl. (Auf die Erklärung kann hier jedoch nicht eingegangen werden.) Der Nebel bildet sich erst geraume Zeit nach der Expansion und ist sehr dünn. Es können nur sehr kleine Tropfen entstehen, die rasch wieder verdunsten, so daß der Nebel nicht lange bestehen kann. Auch ist er im ganzen Gefäß nicht homogen, sondern zeigt infolge des Verdunstens merkbare Schichtung, indem die Tropfengröße von unten nach oben hin abnimmt. Sein Brechungsexponent ist 1,354, liegt also zwischen dem von Wasser und Alkohol. Bei der Kleinheit der Tropfen zeigt Äthernebel breite, schön gefärbte zentrale Felder, welche wenig andere Farben in den Ringen erkennen lassen. Die Färbung ist aber durch die Schichtung des Nebels in gleichen Abständen von der Mitte nicht dieselbe, auch bilden die gerade entstehenden Farben sich infolge des schnellen Verdunstens rasch wieder zurück, so daß an eine Beständigkeit der Erscheinung nicht zu denken ist und genaue Beobachtungen unmöglich sind. Besonders schön war hier jedoch die tiefblaue Farbe des zentralen Feldes ausgebildet, welche ja bei Wassernebel nur schwer zu erhalten war. Es ist somit immerhin möglich, daß hier die Tropfen klein genug sind, um Färbungen zu zeigen, welche noch vor denen der ersten Periode (Tab. 1) liegen. Um axiale Farben der Lichtquelle selbst erkennen zu können, war der Äthernebel nicht dicht genug.

c) Chloroform,  $CHCl_3$ ,  $n = 1,446$ .

Ein Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen auf das Beugungsbild könnte erst jetzt beim Chloroform nachgewiesen

1) R. v. Helmholtz, Ann. d. Phys. u. Chemie 27, S. 508—543. 1886.

werden, da sein Brechungsexponent 1,446 schon mehr als bei Alkohol und Äther von dem des Wasser abweicht. Aber gerade hier liegen die Bedingungen zu ungünstig, um charakteristische Beugungsbilder liefern zu können. Man erhält nämlich nur größere Tropfen, welche normale Beugungsbilder und ungefärbte zentrale Felder liefern, und der Versuch, kleinere durch Einführen von mehr Kondensationskernen zu bekommen, scheitert leider daran, daß der Nebel dann sofort inhomogen wird. Die Messungen selbst, welche Tropfenradien zwischen  $4,6\mu$  und  $9\mu$  ergaben, bieten somit wenig neues und brauchen hier nicht mitgeteilt zu werden. Auch bei diesen Messungen, welche sowohl im roten als auch im weißen Licht ausgeführt wurden, fand ich, wie nach den gemachten Ausführungen zu erwarten war, Übereinstimmung in den Resultaten aus verschiedenen Ringen.

d) Benzol,  $C_6H_6$ ,  $n=1,504$  und Toluol,  $C_6H_5CH_3$ ,  $n=1,499$ .

Benzol und Toluol haben in bezug auf Brechungsexponenten und auch sonstigem Verhalten solch übereinstimmende Eigenschaften, daß es sich empfiehlt, sie zusammen zu behandeln. Bei beiden Flüssigkeiten ist die Nebelbildung eine sehr kräftige, so daß sie glänzende Beugungsringe, von denen stets drei bis vier sichtbar waren, lieferten. Da aber auch hier die Tropfengröße ziemlich groß war, so sank der Nebel rasch zu Boden und machte ein schnelles Messen erforderlich. Allerdings gab Toluol noch etwas kleinere Tropfen als Benzol, doch gelang es mir bei keinem von ihnen, gefärbte zentrale Felder oder anomale Helligkeitsverteilungen zu erhalten, obwohl dies bei Wasser schon längst hätte eintreten müssen. Das Beugungsbild blieb stets normal, wie auch aus den Tabellen hervorgeht, welche ziemlich kleine Tropfenradien erkennen lassen. Es konnten sogar noch größere Beugungsringe als die angegebenen beobachtet werden, doch waren sie dann der Ausmessung nicht mehr zugänglich.

Bis zu einem Tropfenradius von etwa  $2,8\mu$ , bei welchem wir im Wassernebel schon eine recht intensive Färbung des zentralen Feldes beobachten würden (ungefähr Anfang der dritten Periode, Tab. 3), sind hier noch keine Abweichungen zu bemerken, so daß hiermit der Beweis einer Abhängigkeit der anomalen Erscheinungen vom Brechungsexponenten er-



bracht sein dürfte. Allerdings fehlen noch Tropfen kleiner als  $2,8 \mu$ , wo wohl auch bei Benzol und Toluol gefärbte zentrale Felder auftreten würden. Für diese noch bestehende Lücke den Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen nachzuweisen, gestatten mir nun die Versuche mit Anilin, welches verbunden mit einem hohen Brechungsexponenten infolge seiner schweren Flüchtigkeit nur kleine Tröpfchen im Nebel geben kann.

Tabelle 7. Benzol.

$\lambda$	$\varphi_1$	$r_1$	$\varphi_2$	$r_2$	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,65 $\mu$	2° 3'	11,08 $\mu$	3° 51'	10,78 $\mu$	+ 2,7%
0,65	2° 43'	8,32	4° 59'	8,32	$\pm 0,0$
0,65	3° 14'	7,03	5° 54'	7,03	$\pm 0,0$
0,65	3° 39'	6,23	6° 48'	6,10	+ 2,1
0,65	4° 33'	4,98	8° 21'	4,98	$\pm 0,0$
0,65	5° 32'	4,08	10° 8'	4,11	- 0,7
0,571	2° 16'	8,76	4° 5'	8,95	- 2,2
0,571	3° 11'	6,26	5° 54'	6,21	+ 0,8
0,571	3° 51'	5,18	7° 13'	5,07	+ 2,1

Tabelle 8. Toluol.

$\lambda$	$\varphi_1$	$r_1$	$\varphi_2$	$r_2$	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,650 $\mu$	2° 38'	8,61 $\mu$	4° 53'	8,54 $\mu$	+ 0,8%
0,650	3° 11'	7,15	5° 54'	7,06	+ 1,2
0,650	3° 39'	6,24	6° 33'	6,34	- 1,6
0,650	5° 54'	3,86	10° 33'	3,96	- 2,5
0,650	7° 26'	3,06	13° 53'	3,02	+ 1,3
0,571	3° 39'	5,48	6° 48'	5,38	+ 1,8
0,571	5° 25'	3,69	9° 54'	3,71	- 0,5
0,571	5° 54'	3,39	10° 42'	3,43	- 1,2

e) Anilin,  $C_6H_5 \cdot NH_2$ ,  $n = 1,586$ .

Das Beugungsbild des Anilinnebel besteht aus sehr großen, intensiv gefärbten zentralen Feldern, welche manchmal eine solche Ausdehnung annehmen, daß das ganze Gesichtsfeld gleichmäßig gefärbt erscheint. Dadurch verliert die Erscheinung etwas an Intensität und Farbenmannigfaltigkeit. Sonst ist aber die Farbenfolge und Anordnung genau dieselbe wie beim Wassernebel, nur daß hier die Ringe bei gleicher Färbung ganz bedeutend größer sind. So gelang es mir nach

vielen Expansionen,\* das für Wassernebel so charakteristische grüne zentrale Feld herzustellen. Auch hier wird es von einem schmalen dunkelblauen Bande begrenzt und das daran sich anschließende Rot war gerade noch sichtbar. Während aber bei Wasser die Minima Radien von  $8^{\circ} 55'$  und  $19^{\circ}$  (Tab. 4, Nr. 4) besaßen, entsprach hier im roten Licht der erste dunkle Ring einem Beugungswinkel von  $14^{\circ} 35'$  und der zweite war überhaupt nicht mehr zu sehen. Bei gleichem Aussehen hat also das Beugungsbild eine 1,66 mal so große Ausdehnung, was ungefähr gleich dem Verhältnis der um 1 verminderten Brechungsexponenten  $0,586 : 0,333 = 1,758$  ist. Noch größere Tropfen herzustellen, welche etwa normale Beugungsbilder lieferten, war mir nicht möglich, doch dürfte schon zur Genüge erwiesen sein, daß die anomalen Beugungserscheinungen an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

#### § 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen.

Am Schlusse dieser Untersuchungen möchte ich noch kurz Versuche erwähnen, welche ich mit Pilzsporen und Schwefeltropfchen anstellte, um den Einfluß der Durchsichtigkeit zu eliminieren. Aus vielen Messungen, die ich mit *Lycopodium*-pulver in einer Entfernung von 1–3 m von der Lichtquelle machte, erhielt ich im Durchschnitt aus dem ersten Ringe einen Radius von  $15,16 \mu$  aus dem zweiten  $15,16 \mu$ , aus dem dritten  $15,22 \mu$ , und mikroskopisch gemessen durchschnittlich  $15,3 \mu$ , so daß, wie selbstverständlich zu erwarten war, vollständige Übereinstimmung mit der Theorie kreisförmiger Scheibchen besteht. Allerdings würde auch homogener Nebel bei dieser Tropfengröße normale Beugungsbilder liefern; doch Barkow<sup>1)</sup> fand bei Schimmelsporen von  $1,15 \mu$  bis  $6,6 \mu$  Radius, welche also gerade von der für Nebeltropfchen in Betracht kommenden Größenordnung sind, keine merklichen Abweichungen von den optisch nach der Beugungsformel und mikroskopisch gemessenen Werten. Ich selbst stellte mir aus angefeuchtetem Brot Schimmelpilze her, deren Sporen mikroskopisch gemessen ungefähr  $1,5 \mu$  groß waren, und bestreute

1) E. Barkow, Marb. Dissert. S. 67. Die dort angegebenen Werte beziehen sich auf den Durchmesser der Sporen (nicht Radius).

damit eine Glasplatte. Das Beugungsbild war vollkommen normal und so groß, daß nur der erste Ring mit einem Beugungswinkel von etwa  $14^{\circ} 50'$  im roten Licht sichtbar war.

Ferner ließ ich Schwefeldampf an einer kalten Glasplatte sich kondensieren. Nach anfänglichen Mißerfolgen bekam ich schließlich einen Beschlag, deren Teilchen hinreichend homogen waren, doch war die Beugungserscheinung eine gänzlich andere. Das zentrale Feld war dunkel, und daran schloß sich ein tiefblauer und ein roter Ring an, dann erst wären schwach die Fraunhoferschen Beugungsringe zu erkennen. Sein Analogon findet diese Beugungserscheinung in den Ringen behauchter Platten, welche Exner<sup>1)</sup> als ein Phänomen Fraunhoferscher Ringe beschreibt, deren Aureole infolge nicht völlig unregelmäßiger Verteilung der Tröpfchen sich zum Teil in einen dunklen Raum verwandelt hat. In der Tat erkennt man im Mikroskop, daß die Teilchen ziemlich *gleichmäßig verteilt*, aber *regellos angeordnet* sind, indem die Abstände der einzelnen Tröpfchen voneinander nahezu dieselben sind.

#### Zusammenfassung.

Fasse ich die Hauptergebnisse der Untersuchungen zusammen, so läßt sich folgendes sagen:

Die Beugungserscheinungen, welche homogener Nebel im durchgehenden Licht zeigt, lassen sich *nur* bis zu einer Tropfengröße von  $4-5\mu$  Radius durch die Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen erklären.

Bei *kleineren* Tropfen treten im *weißen* Lichte andere Erscheinungen auf; das zentrale Feld, welches bis jetzt weiß war, nimmt intensive Färbungen an, die in ihrer Aufeinanderfolge den Farben dünner Blättchen ähneln. Die Lichtquelle selbst ist bei dichtem Nebel meistens ungefähr *komplementär* dazu gefärbt. Eine Gesetzmäßigkeit der Farbenfolge in den Ringen ist *nicht* zu konstatieren.

Im *monochromatischen* Licht weisen die Beugungsbilder eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima auf, welche einen deutlich periodischen Charakter besitzen. Eine Bestimmung der Tropfengröße aus den Durchmessern der Ringe war deshalb *nicht* möglich. Die Abweichungen nehmen mit

1) K. Exner, Wied. Ann. 4. S. 531. 1878.

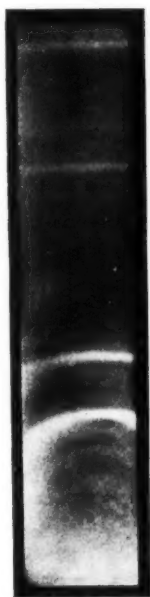
wachsender Tropfengröße ab und das Beugungsbild nähert sich allmählich dem normalen.

Ein Einfluß der Dicke der Nebelschicht auf diese Erscheinungen konnte nicht nachgewiesen werden. Wohl aber geht aus den Versuchen mit anderen Flüssigkeiten einwandfrei hervor, daß die Durchsichtigkeit der Tropfen zur Entstehung der anomalen Beugungsbilder beiträgt, indem diese an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

Vergleichsmessungen an Staubplatten ergaben keine Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen.

Physikal. Institut der Universität Marburg i. H., Juni 1919.

(Eingegangen 16. August 1919.)



Nr. 1. Al



Nr. 2. Th



Nr. 3. Ni



Nr. 4. Mg